GIỚI THIỆU VỀ BÀI TOÁN ĐẲNG CHU

Phan Xuân Quang
Trường THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP Đà Nẵng

==========================

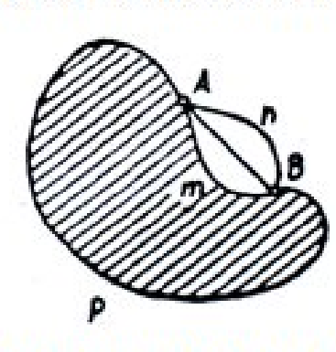
I) Mở đầu : Các bài toán đẳng chu là một trong những bài toán cổ xưa của phép tính biến phân và có lịch sử từ thế kỷ thứ 3 trước công nguyên. Nó vừa là một trong những bài toán cổ điển và nổi tiếng nhất của Toán học sơ cấp, lại vừa là một trong những bài toán thời sự nhất của Toán học hiện đại.
Mặc dù các bài toán đẳng chu đã được đề cập đến từ thời cổ đại, nhưng nghiên cứu có tính đại cương về bài toán đẳng chu chỉ được công bố lần đầu tiên trên thế giới bởi nhà Toán học nổi tiếng Bernoulli năm 1697. Nhà Toán học L. Euler là người đầu tiên nghiên cứu bài toán đẳng chu một cách có hệ thống năm 1732.

II) Các bài toán đẳng chu cổ điển :

*1–**Phát biểu 1** : Trong tất cả các hình trong mặt phẳng có cùng chu vi , hình tròn có diện tích lớn nhất .*

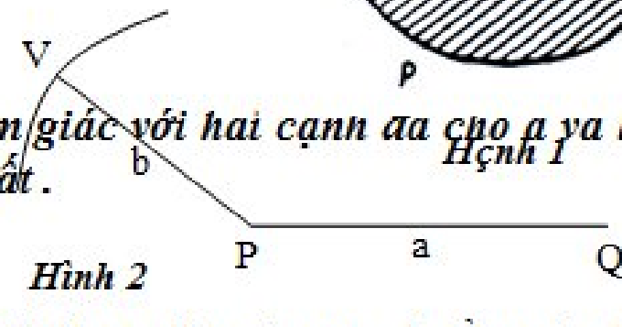
Để chứng minh ***Phát biểu 1*** ta có thể giới hạn các hình phẳng là hình lồi , vì có thể khẳng định : Mọi hình phẳng lõm luôn luôn có một hình phẳng lồi chứa nó với cùng chu vi nhưng diện tích lại lớn hơn .

Thật vậy , nếu hình phẳng là lõm và có chu vi *l* thì ắt phải có một dây AB(hình 1) mà các đầu mút thuộc hình phẳng còn các điểm trong của dây AB nằm ngoà[illegible] hiện phép phản chiếu cung AmB của chu tuyến qua đường thẳng AB và sẽ có cung [illegible] với chu tuyến ApBnA. Nó là hình phẳng lồi, cũng có chu vi *l* nhưng diện tích lại lớn h[illegible]ũ .
Ngoài ra phải chứng minh một số bổ đề sau:



Hình 1

***Bổ đề 1** : Trong tập hợp tất cả các tam giác với hai cạnh đã cho a và b, tam giác mà hai cạnh vuông góc có diện tích lớn nhất .*



Hình 2

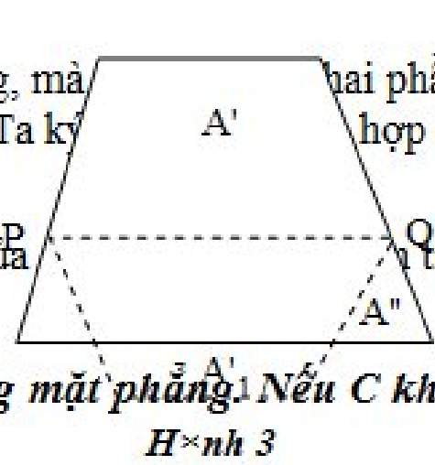
Chứng minh : (Hình 2)
Lấy đoạn PQ = a . Đỉnh thứ ba của tam giác là V với cạnh PV = b nằm trên đường tròn tâm P và bán kính b. Diện tích của tam giác PQV lớn nhất khi và chỉ khi đường cao của nó là lớn nhất , điều này tương đương với PV vuông góc PQ.

***Định nghĩa** : Một cung của tập đóng , bị chặn và lồi A là một đoạn thẳng có hai điểm đầu là hai điểm biên của tập hợp A.*

***Bổ đề 2** : Nếu một tập A chia ra bởi một cung nào đấy thành hai tập hợp có cùng một chu vi, nhưng với diện tích khác nhau, thì tồn tại một tập hợp A_1 có cùng chu vi như A , nhưng với diện tích lớn hơn.*

Chứng minh : (Hình 3) Giả sử PQ là một cung, mà[illegible]hai phần A' và A'' có cùng chu vi , nhưng diện tích của A' lớn hơn diện tích của A'' . Ta ký[illegible] hợp đối xứng với A' qua đường thẳng PQ .

Rõ ràng $A_1 = A'_1 \cup A'$ có cùng chu vi như của[illegible] tích lớn hơn A.

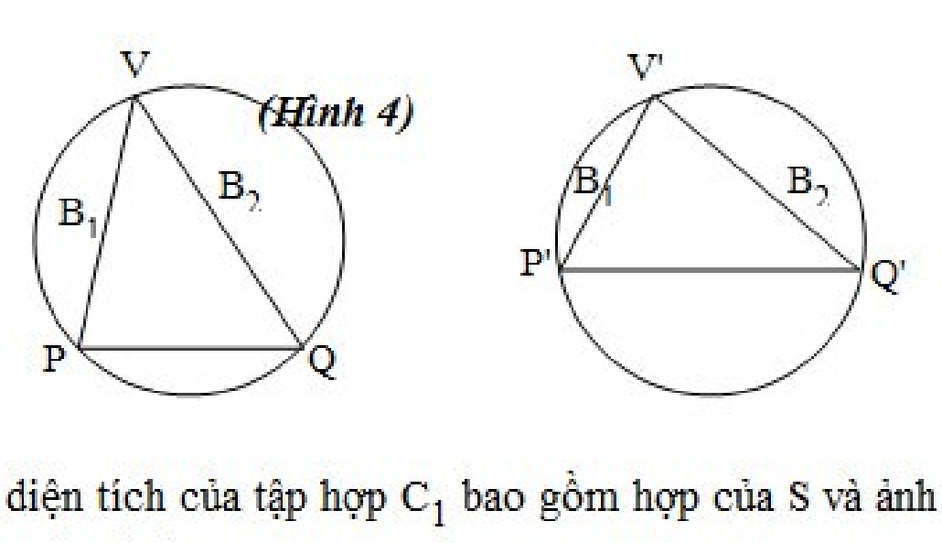


Hình 3

***Bổ đề 3** : Cho C là tập lồi, đóng, bị chặn trong mặt phẳng. Nếu C không là hình tròn, thì tồn tại tập hợp C_1 ($C_1 \neq C$) có cùng chu vi như C, nhưng diện tích thì lớn hơn.*

*Nói cách khác **Phát biểu 1** chỉ có thể là hình tròn.*

Chứng minh : Lấy hai điểm P, Q là hai điểm biên của C , mà nó chia chu vi làm hai phần bằng nhau. Ta có thể nghĩ là cung PQ chia C ra hai tập hợp C' và C'' với cùng một diện tích (nếu ngược lại, bổ đề 2 cho ta C_1 có cùng chu vi nhưng diện tích thì lớn hơn) . Vì C không phải là đường tròn nên tồn tại ít nhất một điểm biên V của C , mà đoạn thẳng PQ sẽ nhìn V một góc không phải là góc vuông (hình 4) .Ta kí hiệu B_1 và B_2 là hai tập hợp cắt C bởi hai cung PV và QV. Nhưng vì $\angle PVQ$ không vuông nên từ bổ đề 1 suy ra tồn tại tam giác vuông P'Q'V' với diện tích lớn hơn diện tích của tam giác PQV , trong đó : P'V' = PV và Q'V' = QV. Dễ thấy diện tích của tập hợp S tạo bởi tam giác P'Q'V' và các tập hợp B_1, B_2 lớn hơn diện tích của tập hợp gồm B_1, B_2 và tam giác PQV.



(Hình 4)

Suy ra diện tích của tập hợp C_1 bao gồm hợp của S và ảnh đối xứng S_1 của S đối với đường thẳng P'Q' sẽ lớn hơn diện tích của C nhưng có cùng chu vi như C.

Trên đây là cách chứng minh của Steiner năm 1838 . Thực ra lời giải không được chặt chẽ cho lắm , bởi vì ta đã công nhận tồn tại hình phẳng có diện tích lớn nhất với chu vi đã cho . Để khắc phục điều này người ta đã phát triển hẳn một ngành toán học khác trong toán học (một phần của Tôpô, một phần của tính toán biến phân...) Bài toán đẳng chu có nhiều cách giải khác nữa, nhưng rất dài và phức tạp ta không đề cập ở đây.

*2. **Phát biểu 2** : Trong tất cả các hình trong mặt phẳng có cùng diện tích đã cho, đường tròn có chu vi nhỏ nhất.*

*3. **Định lý** : Hai phát biểu 1 và 2 là tương đương*

Để chứng minh định lý này ta phải chứng minh 2 bổ đề sau :

Bổ đề 1 : *Giả sử các điểm S và T đã được lấy trên biên của nghiệm hình của phát biểu 1 sao cho chúng chia chu vi của nghiệm hình ra làm 2 phần bằng nhau . Khi đó , đoạn thẳng ST phải chia diện tích của nghiệm hình ra làm 2 phần bằng nhau .*

Bổ đề 2 : *Xét tất cả các đoạn cong với độ dài đã cho và có các đầu mút nằm trên đường thẳng ST . Đường cong bao bên trong một diện tích lớn nhất giữa nó và đường thẳng chính là nữa đường tròn .*

Nhận xét :

- Trong cách chứng minh định lý trên , Steiner chỉ sử dụng cách tiếp cận tổng hợp (nghĩa là thuần túy hình học) . Tuy nhiên còn có một lỗ hổng là ở mỗi bước chứng minh phải giả sử rằng : nghiệm hình của các kết luận đã tồn tại . Để khắc phục điều này phải nhờ đến "kỹ thuật lấy giới hạn" và một số kiến thức căn bản của phép tính vi tích phân .

- Mặt khác , cả 2 phát biểu 1 và 2 đều có thể được trình bày dưới một dạng đại số hơn , Trong đó sự kiện chúng là tương đương được nhấn mạnh thực sự . ***Gọi A và L lần lượt là diện tích, chu vi của một hình phẳng đã cho. Với mọi hình phẳng đều thỏa mãn bất đẳng thức** $4\pi A \le L^2$ (*) **, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi hình đó là hình tròn*** (Bất đẳng thức này được chứng minh chặt chẽ bởi F. Edler năm 1882.)
  - Bằng cách cố định L , ta có phát biểu 1
  - Bằng cách cố định A , ta có phát biểu 2

- Bất đẳng thức đẳng chu có thể mở rộng sang không gian như sau : ***Gọi V và S lần lượt là thể tích, diện tích bề mặt của hình không gian đã cho . Với mọi hình trong không gian đều thỏa mãn bất đẳng thức** $36\pi V^2 \le S^3$ (**) **, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi hình đó là hình cầu .***
  (Bất đẳng thức này được chứng minh chặt chẽ bởi Schwarz năm 1890.)
  Do đó trong không gian tương tự ta cũng có các kết quả sau :

*4. **Phát biểu 3** : Trong tất cả các hình trong không gian với diện tích bề mặt đã cho, hình cầu có thể tích lớn nhất.*

*5. **Phát biểu 4** : Trong tất cả các hình trong không gian với thể tích đã cho, hình cầu có diện tích bề mặt nhỏ nhất.*

*6. **Định lý** : Hai phát biểu 3 và 4 là tương đương .*

III) Mở rộng một số vấn đề về bài toán đẳng chu :

1. Gọi V là thể tích n-chiều của một miền (đo được) Ω nào đó trong không gian Euclide n-chiều E^n, F là thể tích (n – 1)-chiều của siêu mặt S trong E^n bao bọc Ω, v_n là thể tích n-chiều của hình cầu đơn vị n-chiều trong E^n. Bất đẳng thức đẳng chu tổng quát là :

$$\boxed{n^n . v_n . V^{n-1} \le F^n \qquad (***)} \qquad (n \in N,\ n \ge 2)$$

(Bất đẳng thức này được chứng minh chặt chẽ bởi nhà Toán học Nga L.A. Liuxternik năm 1939)

Khi cố định thể tích (n – 1)-chiều F của siêu mặt S của không gian Euclide E^n, trong các miền được bao bọc bởi các siêu mặt S như thế, miền Ω mà trên đó bất đẳng thức đẳng chu xảy ra dấu bằng chính là lời giải của bài toán đẳng chu.

- Khi n = 2 ta được bất đẳng thức dạng như (*) , thể tích n-chiều của miền phẳng Ω chính là diện tích thông thường A của Ω trên mặt phẳng $\mathbf{E}^2$, thể tích (n – 1)-chiều F chính là chu vi thông thường L của đường bao S (còn gọi là chu tuyến) của Ω . Vì F ***hằng*** nên ta thường bảo là "***đẳng chu***".

- Thay cho các siêu mặt bất kỳ của E^n, ta có thể chỉ xét một lớp con các siêu mặt S thỏa mãn một hay một vài điều kiện xác định nào đó, khi ấy (***) vẫn đúng nhưng không còn khả năng xảy ra dấu bằng nữa. Chúng ta sẽ nhận được các bất đẳng thức đẳng chu mới (mà đối với chúng, dấu bằng có thể xảy ra) và các bài toán đẳng chu tương ứng mà tràn đầy tiềm năng ứng dụng trong toán học nói riêng (kể cả Toán học sơ cấp), trong khoa học và thực tiễn nói chung .

2. Một tổng quát hóa khác thì gắn liền với ***lý thuyết hình học của tập mờ*** (the Geometric Theory of Fuzzy Sets) . Trong lý thuyết này có định nghĩa ***các hình tròn mờ và các hình cầu mờ*** . Người ta cũng chứng minh được rằng ***bất đẳng thức đẳng chu tổng quát*** đúng cả với ***các tập mờ*** . Dấu bằng chỉ đạt được đối với ***các hình tròn rõ , hình cầu rõ*** (crisp)

3. Hơn thế nữa , trong toán học hiện đại người ta còn nghiên cứu ***"chiều đẳng chu của 1 đa tạp"*** , là một khái niệm chiều được đưa ra nhằm cố gắng tóm bắt xem ***cách thức phân chia toàn cục của một đa tạp*** thì giống như thế nào với ***các không gian Euclide*** …..

IV) Các ứng dụng thực tế của bài toán đẳng chu :

1. Pappus thời Alexandria đại đế (300 năm trước công nguyên)
đã viết : " Những con ong thì chỉ biết sự kiện có ích cho chúng sau đây : lục giác thì lớn hơn hình vuông và tam giác , và sẽ giữ được nhiều mật hơn khi phí tổn vật chất xây dựng nên chúng là như nhau . Nhưng chúng ta thông thái hơn loài ong , phải khảo sát một bài toán rộng hơn ; cụ thể là trong số các hình đa giác đều thì hình có số góc lớn hơn sẽ lớn hơn và hình lớn nhất trong toàn bộ chúng chính là hình tròn với chu vi bằng chu vi các hình đó ."

2. Bài toán của Công chúa Dido : Dido , con gái của đức vua Tyrian , trốn cha , sau nhiều chuyến phiêu lưu đã đến bờ biển châu Phi , ở đây Dido đã trở thành người sáng lập ra xứ Carthage và là nữ vương nổi tiếng đầu tiên của xứ sở này . Dido bắt đầu bằng cách mua của những người thổ dân Bắc Mỹ một mãnh đất trên bờ biển , ***" không lớn hơn tấm da bò "*** . Nàng cắt tấm da thành những sợi mảnh rồi bện lại thành một cái thừng dài . Nhưng sau đó Dido vấp phải một bài toán hình học:***" Dùng cái thừng có chiều dài đã cho , phải vây quanh một mãnh đất có hình như thế nào để được diện tích lớn nhất?"***
Ở đất liền thì câu trả lời ***tất nhiên sẽ là hình tròn*** , nhưng ở trên bờ biển thì bài toán này thay đổi , khi đó lời giải của bài toán Dido ***là nửa hình tròn có tâm trên bờ biển***

3. Trong chương trình bồi dưỡng toán THPT hay gặp các bài toán đẳng chu dạng : ***" từ tất cả các hình có một tính chất cho trước, ta hãy đi tìm những hình như vậy đạt giá trị lớn nhất hoặc đạt giá trị nhỏ nhất về diện tích hoặc chu vi hoặc thể tích hoặc diện tích xung quanh..".***

● Một số bài toán đẳng chu quen thuộc :

- Trong số các tam giác có cùng chu vi , tam giác đều có diện tích lớn nhất .
- Trong số các tam giác có chu vi và chiều dài của một cạnh cho trước thì tam giác cân là hình có diện tích lớn nhất .
- Trong số các tứ giác có cùng chu vi , hình vuông có diện tích lớn nhất .
- Trong số các tứ giác lồi với số đo các góc ở đỉnh cho trước và chu vi cho trước , tứ giác ngoại tiếp có diện tích lớn nhất .
- Trong số các hình chữ nhật có cùng chu vi , hình vuông có diện tích lớn nhất
- Trong một số hữu hạn bất kỳ các đa giác đều có cùng chu vi , đa giác đều với số cạnh lớn nhất thì có diện tích lớn nhất
- Trong số tất cả các n-giác lồi A_1...An với số đo các góc Ai cho trước và chu vi cho trước, n-giác ngoại tiếp có diện tích lớn nhất.
- Trong tất cả đa giác n cạnh với các cạnh đã cho, đa giác nội tiếp trong đường tròn có diện tích lớn nhất

- Trong tất cả những hình bình hành có chu vi cho trước thì hình vuông là hình có diện tích lớn nhất
- Trong tất cả những hình bình hành có chu vi và chiều dài của một đường chéo cho trước thì hình thoi là hình có diện tích lớn nhất
- Trong tất cả những hình hộp có tổng các cạnh cho trước thì hình lập phương là hình có thể tích lớn nhất.

V) Giới thiệu một số lời giải bài toán đẳng chu phẳng :

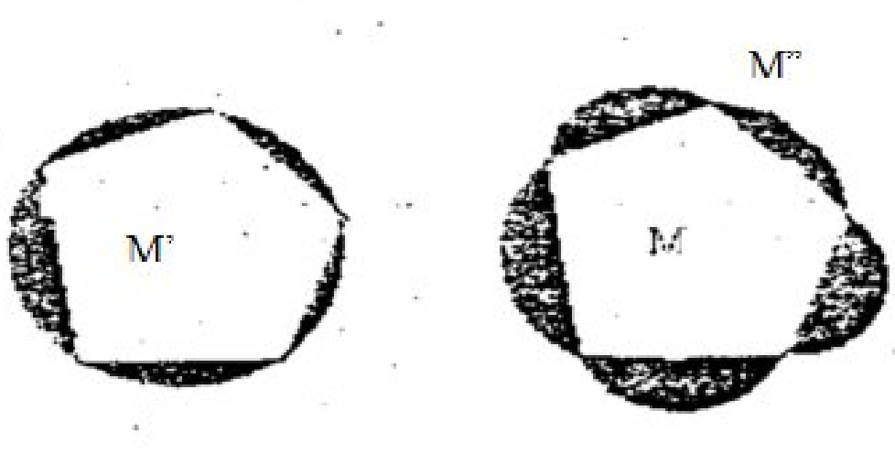
Bài toán 1 : *Trong tất cả các tam giác với chu vi đã cho hãy tìm tam giác với diện tích lớn nhất.*

Lời giải : Xét tam giác bất kỳ với độ dài các cạnh là a, b, c và chu vi 2p = a + b + c. Theo công thức Héron $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$
Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 3 số ta có :

$$\sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)} \le \frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3} = \frac{1}{3}p$$

Suy ra : $S \le \frac{p^2\sqrt{3}}{9}$,đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi p–a = p–b =p–c, hay là a = b = c . Vậy diện tích của mọi tam giác có chu vi 2p không vượt quá $\frac{p^2\sqrt{3}}{9}$ và bằng $\frac{p^2\sqrt{3}}{9}$ khi và chỉ khi tam giác đó là tam giác đều .

Bài toán 2 : *Trong tất cả các đa giác n cạnh với các cạnh đã cho, đa giác nội tiếp trong đường tròn có diện tích lớn nhấtt*

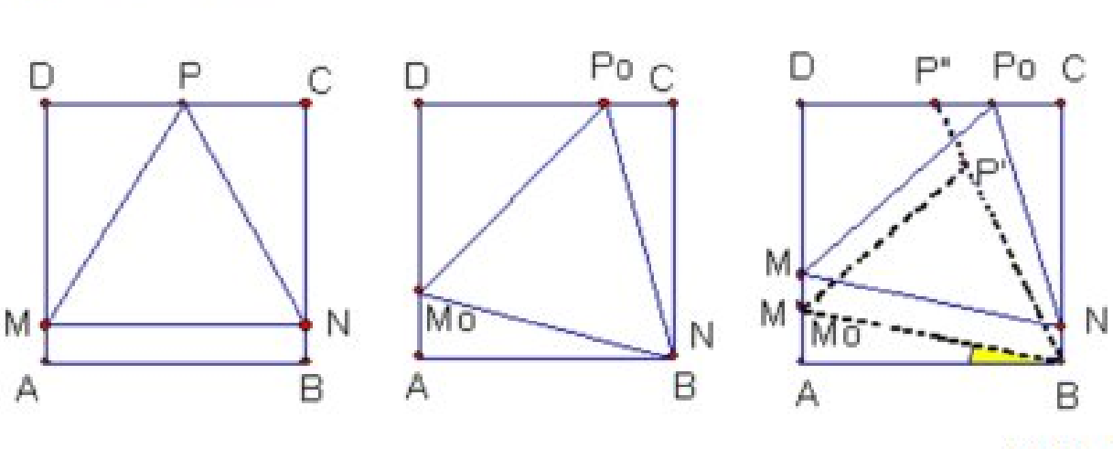


Hình 5

Lời giải : (Hình 5). Giả sử M là đa giác bất kỳ với các cạnh đã cho và M' là đa giác như vậy nội tiếp trong đường tròn. Trên các cạnh của M ta dựng các mảnh tương ứng với mảnh mà đường tròn cắt ra bởi các cạnh M'. Cùng với M các mảnh ghép lại tạo ra M'' có chu vi bằng chu vi đường tròn ngoại tiếp M'. Khi đó theo phát biểu 1.1 , thì đường tròn ngoại tiếp M' có diện tích lớn hơn diện tích của M''. Sau khi ta bỏ đi các mảnh chung ở hai hình thì diện tích của M' lớn hơn diện tích của M .

Bài toán 3 : *Trong hình vuông hãy dựng nội tiếp một tam giác đều, mà diện tích của nó :*
a/ nhỏ nhất *b/ lớn nhất.*

Lời giải :
a/ Có ít nhất hai đỉnh của tam giác đều nội tiếp trong hình vuông, nằm trên những cạnh đối diện nhau. Suy ra cạnh của nó lớn hơn hoặc bằng cạnh của hình vuông. Từ đây dẫn đến kết luận diện tích của tam giác đều nội tiếp trong hình vuông có diện tích nhỏ nhất, khi một cạnh của nó song song với một cạnh của hình vuông
(Dựng như hình 6)



Hình 6

b/ Cho hình vuông ABCD với cạnh là 1. Ta sẽ chứng minh rằng một tam giác đều nội tiếp hình vuông nói trên có diện tích lớn nhất thì một đỉnh của nó trùng với một đỉnh của hình vuông ?
Ta xét tam giác đều nội tiếp bất kỳ MNP. Ta có thể giả thiết NB < MA
Ta tịnh tiến song song tam giác MNP sao cho điểm N tới điểm B. Các điểm M , P lần lượt đến M' , P' . Ký hiệu P'' là giao điểm của BP' với CD . Giả sử $\widehat{M'BA} = \alpha > 15^0$. Khi đó $\widehat{P''BC} = \beta < 15^0$ và $BP'' = \frac{1}{\cos\beta} < \frac{1}{\cos\alpha} = BM' = BP'$ suy ra : BP'' < BP' điều này vô lý , vậy $\alpha \le 15^0$

$$\Rightarrow MN = M'B = \frac{1}{\cos\alpha} \le \frac{1}{\cos 15^0} = M_0B$$

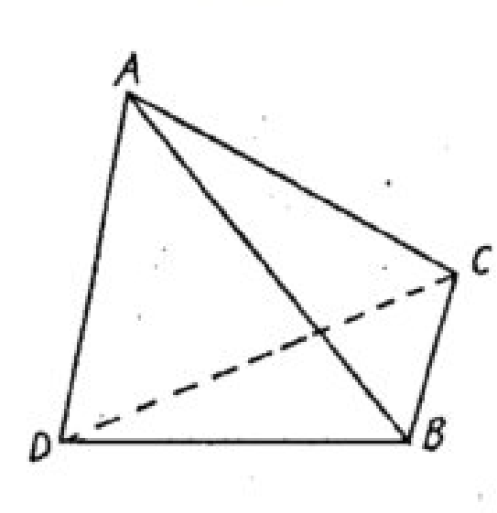
(Với M_0 , P_0 lần lượt thuộc cạnh AD , DC sao cho : ~~$M_0BA = P_0$~~$BC = 15^0$)
Điều này chỉ ra rằng diện tích của tam giác đều MNP nhỏ hơn hoặc bằng diện tích tam giác đều M_0BP_0 , Từ đó suy ra điều phải chứng minh .

VI) Giới thiệu một số bài toán đẳng chu trong không gian :

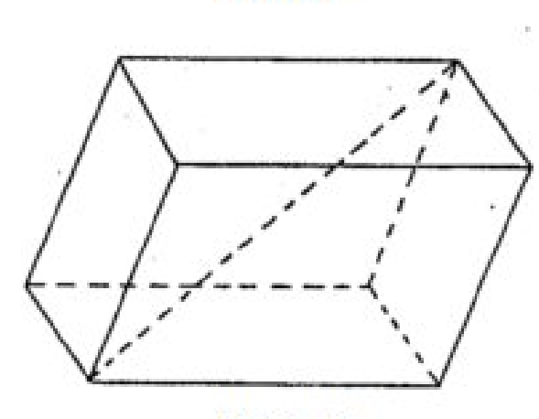
Bài toán 1 : *Trong tất cả những hình hộp có tổng chiều dài của các cạnh cho trước, hãy tìm hình hộp có thể tích lớn nhất.*

Bài toán 2 : *Trong tất cả những hình hộp có tổng chiều dài của các cạnh và chiều dài của một đường chéo cho trước, hãy tìm hình hộp có thể tích lớn nhất .*

Trước khi nêu bài toán 2 một cách khác đi , dưới dạng một bài toán trong không gian tương tự như bài toán 2 , chúng ta hãy thống nhất với nhau một số định nghĩa: Một đường gấp khúc kín gồm 4 cạnh mà những đỉnh không nằm trong cùng một mặt phẳng thì được gọi là một tứ giác ghềnh. Nếu những đỉnh của một tứ diện trùng với những đỉnh của một tứ giác ghềnh thì người ta nói rằng nó trương tứ giác đó (hình 7)



Hình 7



Hình 8

Có thể thấy một cách dễ dàng rằng thể tích của một tứ diện trương một tứ giác ghềnh mà các cạnh là một đường chéo và 3 cạnh kề liên tiếp của một hình hộp (hình 8) thì bằng $\frac{1}{6}$ thể tích hình hộp.Vì vậy, bài toán 2 tương đương với bài toán sau :

Bài toán 2' : *Trong tất cả những tứ giác ghềnh có chu vi cho trước bằng 2p và chiều dài của một cạnh cho trước bằng h, hãy tìm tứ giác ghềnh sao cho tứ diện trương nó có thể tích lớn nhất.*
Sau khi đã giải những bài toán trên , chúng ta có thể giải dễ dàng bài toán sau :

Bài toán 3 : *Trong tất cả những tứ giác ghềnh có chu vi cho trước bằng 2p, hãy tìm tứ giác sao cho hình tứ diện trương nó có thể tích lớn nhất.*

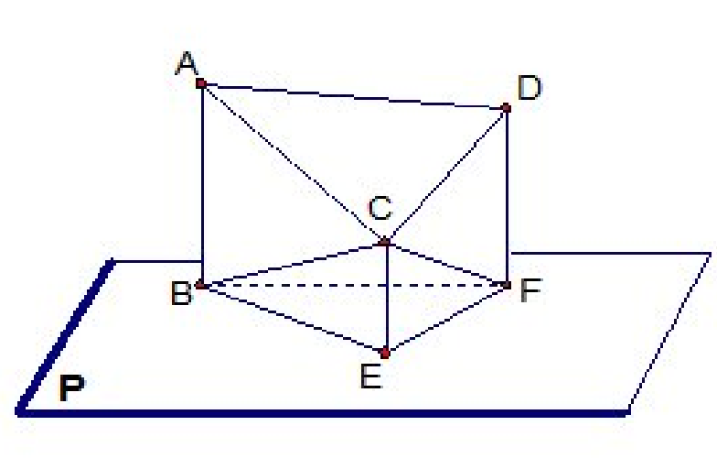
Giải bài toán 1 :
Vì rằng trong tất cả những hình bình hành có chiều dài của các cạnh cho trước thì hình chữ nhật là hình có diện tích lớn nhất còn trong tất cả những hình hộp có chiều dài của các cạnh cho trước thì hình hộp chữ nhật là hình có thể tích lớn nhất , nên khi giải bài toán 1, ta chỉ cần xét các hình hộp chữ nhật . Nếu gọi chiều dài các canh của một hình hộp chữ nhật là a_1, a_2, a_3 thì từ bất đẳng thức Cauchy :

$$\sqrt[3]{a_1a_2a_3} \le \frac{1}{3}(a_1 + a_2 + a_3)$$

(trong đó dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = a_3$) sẽ dẫn tới kết quả sau :

Định lí 1 : *Trong tất cả những hình hộp có tổng các cạnh cho trước thì hình lập phương là hình có thể tích lớn nhất .*

Giải bài toán 2' :
Để giải bài toán này, chúng ta sẽ dùng bổ đề sau :
Gọi P là mặt phẳng vuông góc với cạnh AB của một tứ giác ghềnh ABCD (hình 9) Chiếu ABCD lên mặt phẳng P, ta được tam giác BEF.



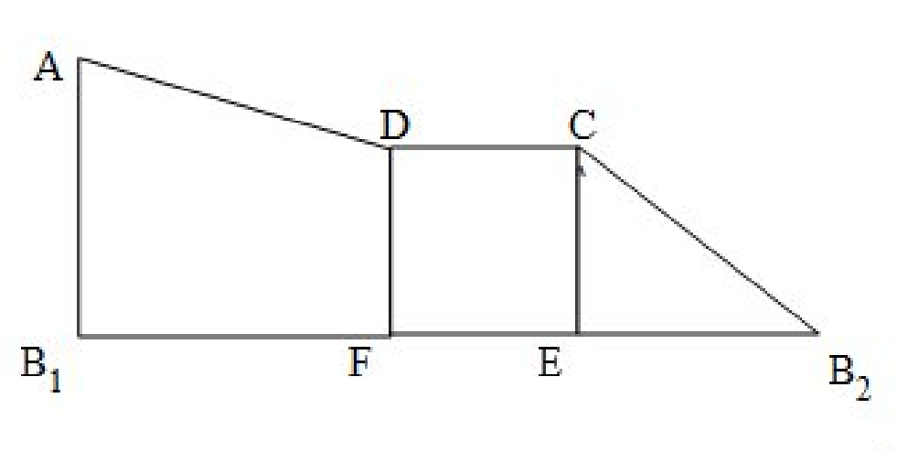
Hình 9

***Bổ đề** :Thể tích V của một tứ diện trương tứ giác ABCD được tính theo công thức:*

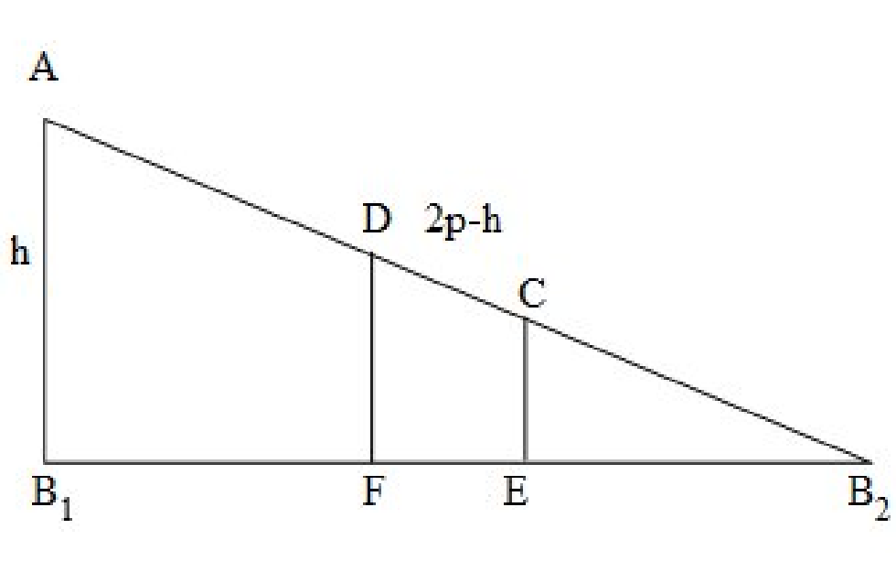
$$\mathbf{V = \frac{1}{3} S\, h \quad (1)}$$

Trong đó : *h là chiều dài cạnh AB và S là diện tích tam giác BEF*
Để chứng minh, chúng ta chỉ cần chú ý rằng các tứ diện ABCD và ABEF tương đương nhau , vì rằng chúng đều tương đương với tứ diện ABCF.

Công thức (1) gợi ý ngay cho ta cách giải bài toán 2' : Cần xác định độ dài và vị trí các cạnh BC, CD và AD (hình 9) sao cho diện tích tam giác BEF là lớn nhất.
Muốn đạt được điều đó, trước hết cần làm sao cho chu vi của nó có giá trị lớn nhất. Ta hãy trải các mặt ABFD, FDCE và CEB lên trên một mặt phẳng. Trên hình phẳng mà ta thu được (hình 10), chiều dài cạnh B_1B_2 bằng chu vi của tam giác BEF, từ đó ta thấy rằng chu vi đó sẽ lớn nhất khi các đoạn AD , DC , CB chỉ tạo thành với cạnh AB một góc $\alpha = \arccos\left[\frac{h}{(2p-h)}\right]$ mà thôi (hình 11) . Do đó tứ giác ghềnh có cạnh AB = h và chu vi bằng 2p sao cho tam giác BEF có chu vi lớn nhất có thể dựng theo cách sau đây



Hình 10



Hình 11

Gấp một hình chữ nhật có cạnh AB_1 = h và đường chéo AB_2 = 2p - h thành mặt xung quanh của một lăng trụ đáy tam giác sao cho điểm B_1 đến trùng với điểm B_2 và đoạn AB_1 là một cạnh bên của nó. Khi đó, đường B_1ADCB_2 trở thành tứ giác ghềnh mà ta muốn có.

Bằng cách đó, bài toán của chúng ta đã được đưa về bài toán đẳng chu đối với tam giác BEF. Như chúng ta đã biết, với một chu vi cho trước, tam giác này sẽ có diện tích lớn nhất khi BF = FE = EB, do đó tứ giác ABCD đáp ứng yêu cầu của bài toán 2', phải có các cạnh AD, DC và CD bằng nhau. Với điều kiện này, và điều kiện đòi hỏi AD, DC và CB tạo thành với AB chỉ một góc mà thôi , tứ giác ABCD sẽ được xác định một cách duy nhất. Và như vậy là ta đã chứng minh xong .

Định lí 2 : *Trong tất cả những tứ diện trương tứ giác ghềnh ABCD có chu vi cho trước bằng 2p và chiều dài của cạnh AB cho trước bằng h thì tứ diện có thể tích lớn nhất là tứ diện trương tứ giác mà các cạnh AD, DC và CB bằng nhau và làm thành với cạnh AB những góc bằng nhau.*
Đồng thời , chúng ta cũng có được cách dựng tứ giác ghềnh trương tứ diện lớn nhất : muốn vậy, ta lấy một hình chữ nhật có một cạnh bằng h và đường chéo bằng 2p - h và gấp nó thành xung quanh của một hình lăng trụ tam giác đều .

Giải bài toán 3
Ta hãy tính thể tích lớn nhất nói tới trong định lí 2 . Từ (hình 11) ta thấy rằng chu vi tam giác BEF bằng $\sqrt{(2p-h)^2 - h^2} = 2\sqrt{p(p-h)}$
nghĩa là diện tích lớn nhất của nó bằng $\left[\frac{2\sqrt{p(p-h)}}{3}\right]^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{p(p-h)\sqrt{3}}{9}$
cuối cùng , thể tích lớn nhát của hình tứ diện được trương , theo công thức (1) là

$$V = \frac{ph(p-h)\sqrt{3}}{27} \qquad (2)$$

Bây giờ , chúng ta có thể giải bài toán 3 một cách dễ dàng . Bài toán này khác với bài toán 2' là ở chỗ người ta chỉ cho biết chu vi của tứ giác .
Dĩ nhiên là để giải bài toán này, chỉ cần lấy giá trị h trong bài toán trên sao cho vế phải của công thức (2) có giá trị lớn nhất . Giá trị h đó được xác định từ bất đẳng thức Cauchy :

$$h(p - h) \le \left(\frac{h+(p-h)}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $h = p - h \Leftrightarrow h = \frac{p}{2}$
Từ đó suy ra lời giải của bài toán 3

Định lí 3 : *Trong tất cả những tứ diện trương các tứ giác ghềnh có chu vi chi trước thì tứ diện có thể tích lớn nhất là tứ diện trương tứ giác trong đó các cạnh bằng nhau và góc giữa mọi cặp cạnh cũng bằng nhau.*

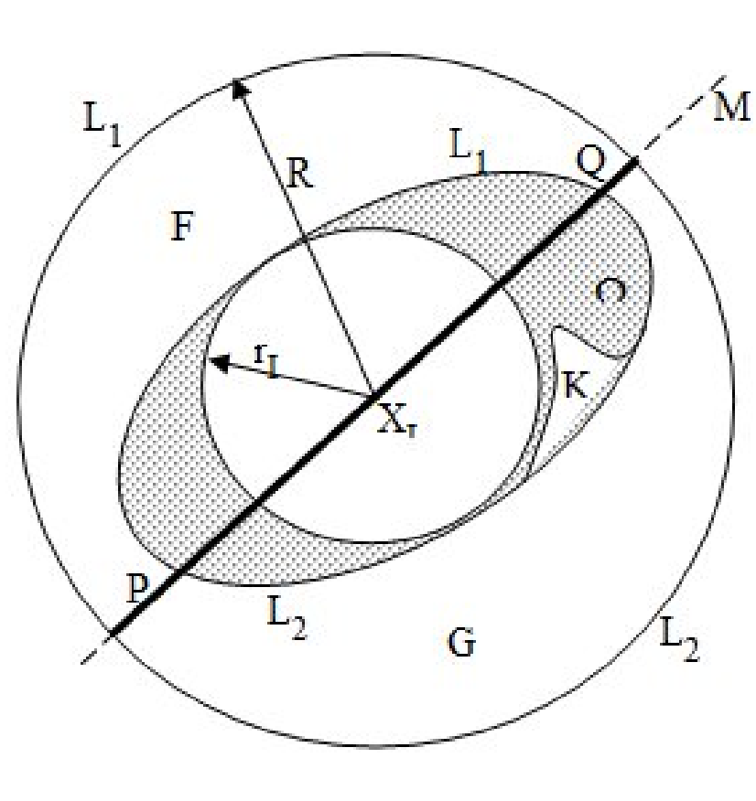
Thật vậy, nếu $h = \frac{p}{2}$ thì chiều dài của mỗi cạnh còn lại sẽ bằng $\frac{(2p-h)}{3} = \frac{p}{2}$, có thể chứng minh sự bằng nhau của các góc bằng cách tính trực tiếp (vì $h = \frac{p}{2}$ nên tất cả các góc đều bằng $\arccos(\frac{1}{3})$) , tuy nhiên một cách đơn giản hơn , có thể chú ý rằng trong tứ giác mà ta xét , tất cả các cạnh đều có vai trò như nhau .

VII) Giới thiệu bất đẳng thức đẳng chu Hadwiger :

Giả sử Ω là một tập compact với biên C^1 từng khúc , có diện tích A và chu vi $\mathcal{L}$. Cho M là một đường thẳng đi qua tâm nội tiếp XI của bao lồi K của Ω và $a = \mathcal{L}(K \cap \Omega)$ là độ dài của một dây đi qua tâm nội tiếp .

Khi đó : $$\boxed{\mathcal{L}^2 - 4\pi\mathcal{A} \ge \frac{\pi^2}{4}(a - 2r_I)^2 \qquad (****)}$$

Để ý rằng ***dấu bằng xảy ra*** trong bất đẳng thức đẳng chu (****) kéo theo ***sự kiện tất cả các dây đi qua tâm nội tiếp của K đều trùng với đờng kính của đờng tròn nội tiếp*** , và do đó ***K phải là một hình tròn*** .



VIII) Tài liệu tham khảo :

1. **Andrejs Treibergs**, *"Inequalities that Imply the Isoperimetric Inequality"*, **Tài liệu lấy từ Internet.**
2. *"Isoperimetric Theorem and Inequality"*, **Tài liệu lấy từ Internet.**
3. *" Tuyển tập 30 năm tạp chí Toán học và Tuổi trẻ"*
   Nxb Giáo dục (1998) .
4. **Nguyễn Hữu Điển** ,*"Phương pháp giải các bài toán cực trị trong hình học"*, **Nxb Khoa học và kỹ thuật (2002) .**
5. **G. Polia** , *" Toán học và những suy luận có lý , quyển 1 – tập 2 "*
   Nxb Giáo dục (1997) .