

BẤT ĐẲNG THỨC VỀ ĐA THỨC HOÁ

Lê Hoàng Phò

Trường THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP Đà Nẵng

Các bài toán sau, đề bài không đề cập đến đa thức nhưng ta sẽ đưa đa thức vào để giải quyết bài toán.

Bài toán 1:

Cho 6 số a,b,c,d,p và q thỏa mãn:

$$p^2 + q^2 - a^2 - b^2 - c^2 - d^2 > 0$$

Chứng minh:

$$(p^2 - a^2 - b^2)(q^2 - c^2 - d^2) \geq (pq - ac - bd)^2$$

Giải:

Từ giả thiết: $p^2 + q^2 - a^2 - b^2 - c^2 - d^2 > 0$

thì có: $(p^2 - a^2 - b^2) + (q^2 - c^2 - d^2) > 0$

Do đó có ít nhất 1 số hạng dương, chẳng hạn: $p^2 - a^2 - b^2 > 0$

ta suy ra p khác 0.

Xét đa thức bậc 2: $f(x) = (p^2 - a^2 - b^2)x^2 - 2(pq - ca - bd)x + q^2 - c^2 - d^2$

Ta có: $f(x) = (px - q)^2 - (ax - c)^2 - (bx - d)^2$

nên $(p^2 - a^2 - b^2)f(\frac{q}{p}) < 0$ suy ra đa thức bậc 2 có nghiệm .

do đó $\Delta \geq 0$ nên:

$$(p^2 - a^2 - b^2)(q^2 - c^2 - d^2) \geq (pq - ac - bd)^2$$

Bài toán 2:

Cho n số $x_i \in [0,1], i = 1,2,...,n$

Chứng minh:

$$(1 + \sum_{i=1}^n x_i)^2 \geq 4 \sum_{i=1}^n x_i^2$$

Giải:

Xét đa thức bậc 2:

$$f(x) = x^2 - (1 + \sum_{i=1}^n x_i)x + \sum_{i=1}^n x_i^2$$

có hệ số a=1 > 0 và:

$$f(1) = 1^2 - (1 + \sum_{i=1}^n x_i)1 + \sum_{i=1}^n x_i^2$$

$$= \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n (x_i^2 - x_i) = \sum_{i=1}^n x_i(x_i - 1) \leq 0$$

nên $f(1) \leq 0$ do đó phương trình có nghiệm

Vậy $\Delta \geq 0$ nên:

$$(1 + \sum_{i=1}^n x_i)^2 - 4 \sum_{i=1}^n x_i^2 \geq 0 \text{ hay } (1 + \sum_{i=1}^n x_i)^2 \geq 4 \sum_{i=1}^n x_i^2$$

Bài toán 3:

Cho a,b,c phân biệt. Chứng minh

$$\min\{a,b,c\} < \frac{a+b+c-\sqrt{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}}{3} < \frac{a+b+c+\sqrt{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}}{3} < \max\{a,b,c\}$$

Giải:

Giả sử $a < b < c$

Xét đa thức $f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$

thì

$$f(x) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2(a+b+c)x + (ab+bc+ca)$$

$$\Rightarrow \Delta' = (a+b+c)^2 - 3(ab+bc+ca)$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca > 0$$

nên $f'(x) = 0$ có 2 nghiệm

$$a+b+c \pm \sqrt{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}$$

$$x_{1,2} = \frac{a+b+c \pm \sqrt{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}}{3}$$

Vì f có 3 nghiệm: $a < b < c$

nên f' có 2 nghiệm xen kẽ: $a < x_1 < b < x_2 < c$

$$\text{Do đó: } a < \frac{a+b+c-\sqrt{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}}{3}$$

$$< \frac{a+b+c+\sqrt{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}}{3}$$

$$< c$$

Bài toán 4:

Cho a,b,c là 3 cạnh một tam giác tùy ý.

Chứng minh:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2$$

Giải:

Dùng phép thế RAVI : $a = y+z, b = z+x, c = x+y$ thì chứng minh được bỏ đề:

Nếu $P(a,b,c)$ là đa thức đối xứng tuần nhất bậc 3 thỏa mãn:

$$P(1,1,1) \geq 0, P(1,1,0) \geq 0, P(2,1,1) \geq 0 \text{ thì:}$$

$$P(a,b,c) \geq 0 \text{ với } a,b,c \text{ là 3 cạnh một tam giác tùy ý.}$$

Bất đẳng thức tương đương:

$$2(a+b)(b+c)(c+a) \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right) \geq 0$$

Đặt $P(a,b,c)$ là vế trái Ta kiểm tra 3 điều kiện của bỏ đề một cách đơn giản:

$$P(1,1,1) = 4 \geq 0, P(1,1,0) = 0 \geq 0, P(2,1,1) = 6 \geq 0$$

nên có điều cần phải chứng minh.

Bài toán 5:

Cho a, b, c, d > 0. Chứng minh:

$$\sqrt[3]{\frac{abc+acd+acd+dab}{4}} \leq \sqrt{\frac{ab+bc+cd+da+ac+bd}{6}} \quad (\text{Đức 1970})$$

Giải:

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \leq b \leq c \leq d$

Xét đa thức:

$$f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$$

$$= x^4 - (a+b+c+d)x^3 + (ab+bc+cd+da+ac+bd)^2x - (abc+acd+acd+dab)x + abcd$$

Vì f có 4 nghiệm dương nên f' có 3 nghiệm $x_1, x_2, x_3 > 0$

$$f'(x) = 4x^3 - 3(a+b+c+d)x^2 + 2(ab+bc+cd+da+ac+bd)x - (abc+acd+acd+dab)$$

$$= 4(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$

Theo định lý Viète, ta có:

$$x_1x_2x_3 = \frac{1}{4} (abc+acd+acd+dab)$$

$$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1 = \frac{1}{2} (ab+bc+cd+da+ac+bd)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy:

$$\frac{1}{2} (ab+bc+cd+da+ac+bd)$$

$$= x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1$$

$$\geq 3\sqrt{(x_1x_2x_3)^2}$$

$$= 3\sqrt{\frac{1}{16}(abc+acd+acd+dab)^2}$$

Từ đó suy ra đpcm.

Bài toán 6:

Chứng minh rằng với mọi bộ n số phân biệt $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}$ ta luôn có

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{a_i a_j}{i+j} \geq 0$$

Giải:

Xét đa thức:

$$Q(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{a_i a_j}{i+j} x^{i+j}$$

$$\text{Ta có: } Q'(x) = \frac{1}{x} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j x^{i+j} = \frac{1}{x} \left(\sum_{i=1}^n a_i x^i \right)^2$$

Suy ra $Q'(x) \geq 0$ với mọi $x > 0$. Do đó hàm số $Q(x)$ đồng biến trong $(0, +\infty)$ và

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{a_i a_j}{i+j} = f(1) \geq f(0) = 0$$

$$\text{Vậy: } \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{a_i a_j}{i+j} \geq 0$$

Bài toán 7:

Cho $a_1 < a_2 < ... < a_n \leq a_1 + 1$

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{\prod_{j=1, j \neq i}^n |a_i - a_j|} \geq 2^{2n-3}$$

Chứng minh:

Giải:

Đa thức Trébusép: $T_n(x) = \cos(n \cdot \arccos(x))$ hay:

$$T_n(\cos x) = \cos nx \text{ có công thức truy hồi } T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$$

$\Rightarrow$ Hệ số cao nhất của đa thức $T_n(x)$ là 2^{n-1}

Xét đa thức Trébusép bậc (n-1):

$$T_{n-1}(x) = a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1x + a_0$$

Áp dụng công thức nội suy Lagrange :

$$T_{n-1}(x) = \sum_{i=1}^n T_{n-1}(a_i) \prod_{j=1, j \neq i}^n \left(\frac{x - a_j}{a_i - a_j} \right)$$

Bằng cách cân bằng hệ số cho ta:

$$\sum_{i=1}^n \frac{T_{n-1}(a_i)}{\prod_{j=1, j \neq i}^n (a_i - a_j)} = 2^{n-2}$$

$$a_{n-1} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\prod_{j=1, j \neq i}^n (a_i - a_j)}$$

Áp dụng cho bài toán đối với đa thức Trébusép bậc n-1

$$T_{n-1}(x'): \text{ trong đó } x' = 2x - 2a_1 - 1 \Rightarrow x' \in (-1, 1); x \in (a_1, a_1 + 1)$$

$$= 2(x - a_1 - \frac{1}{2}); a'_i = 2(a_i - a_1 - \frac{1}{2})$$

$$\Rightarrow a'_i - a'_j = 2(a_i - a_j)$$

$$\Rightarrow a_{n-1} = 2^{n-2} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{T_{n-1}(a'_i)}{2^{n-1} \prod_{j=1, j \neq i}^n (a_i - a_j)}}$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{2^{n-1} \prod_{j=1, j \neq i}^n (a_i - a_j)}$$

Vì $T_{n-1}(a'_i) \leq 1, \forall i = \overline{1, n} \Rightarrow 2^{n-2} \leq$

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{\prod_{j=1, j \neq i}^n (a_i - a_j)} \geq 2^{2n-3}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \frac{1}{\prod_{j=1, j \neq i}^n (a_i - a_j)} \geq 2^{2n-3} \quad (\text{đpcm})$$

Bài toán 8:

Chứng minh tập nghiệm của bất phương trình:

$$\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} + ... + \frac{70}{x-70} \geq \frac{5}{4}$$

là hợp các khoảng rời nhau và có tổng độ dài là 1988.

(Vô địch quốc tế)

Giải:

$$\text{Ta có: } \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} + ... + \frac{70}{x-70} - \frac{5}{4} = \sum_{k=1}^{70} \frac{k}{x-k} - \frac{5}{4}$$

$$= \frac{\sum_{j=k}^k k \prod_{j \neq k} (x-j)}{\prod_{j=1}^k (x-j)} - \frac{5}{4} = \frac{4 \sum_{j=k}^k k \prod_{j \neq k} (x-j) - 5 \prod_{j=1}^k (x-j)}{4 \prod_{j=1}^k (x-j)}$$

$$= \frac{f(x)}{g(x)} \text{ với qui ước } k, j = \overline{1, 70}$$

Rõ ràng $g(x) = 0$ có 70 nghiệm $x = 1, 2, ..., 70$

Và f liên tục trên $\mathbb{R}, f(k) = f(k+1) < 0$ với $k = \overline{1, 69}$ và $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) < 0, f(70) > 0$ nên cũng có đủ 70 nghiệm xen kẽ là :

$$1 < x_1 < 2 < x_2 < ... < x_{69} < 70 < x_{70}$$

$$f(x)$$

Tổng độ dài các khoảng nghiệm của bất phương trình: $Q(x) \geq 0$ là:

$$S = (x_1 - 1) + (x_2 - 2) + ... + (x_{70} - 70)$$

$$= (x_1 + x_2 + ... + x_{70}) - (1 + 2 + ... + 70)$$

Đề ý đa thức $f(x)$ có bậc 70, hệ số cao nhất là -5 và hệ số theo x^{69} là :

$$9(1 + 2 + ... + 70)$$

$$\text{Do đó: } S = \frac{-9(1 + 2 + ... + 70)}{-5} - (1 + 2 + ... + 70)$$

$$S = \frac{4}{5} \cdot \frac{70 \cdot 71}{2}$$

$$\text{Vậy: } S = 1988.$$

Bài toán 9:

Cho n số dương $a_1, a_2, ..., a_n$ phân biệt

$$\text{Đặt } P_0 = n; P_1 = \frac{1}{C_n^1} \sum_{i=1}^n a_i, P_2 = \frac{1}{C_n^2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j$$

$$P_k = \frac{1}{C_n^k} \sum a_i a_j ... a_k, P_n = \frac{1}{C_n^n} \prod_{i=1}^n a_i$$

Chứng minh: a) $P_k^2 \geq P_{k-1} \cdot P_{k+1}$

$$\text{b) } \sqrt[k]{P_k} \geq \sqrt[k+1]{P_{k+1}}$$

Giải:

a) Xét đa thức $P(x) = (x + a_1)(x + a_2) ... (x + a_n)$

$$= x^n + C_n^1 P_1 x^{n-1} + ... + C_n^k P_k x^{n-k} + ... + P_n$$

Đa thức $P(x)$ có n nghiệm phân biệt nên theo hệ quả của định lý Lagrăng thì $P'(x)$ có n-1 nghiệm phân biệt, $P''(x)$ có n-2 nghiệm phân biệt.

$\Rightarrow P^{(n-k-1)}(x)$ có k+1 nghiệm phân biệt khác 0.

Đặt $Q(x) = P^{(n-k-1)}(x)$

$$= \frac{n!}{(k+1)!} x^{k+1} + \frac{(n-1)!}{k!} C_n^1 P_1 x^k + ... + \frac{(n-k+1)!}{2!} C_n^{k-1} P_{k-1} x^2$$

$$+ \frac{(n-k)!}{1!} C_n^k P_k x + (n-k-1)! C_n^{k+1} P_{k+1}$$

Đặt $y = \frac{1}{x}$ thì $Q(y)$ cũng có k+1 nghiệm phân biệt khác 0.

$$\Rightarrow R(y) = y^{k+1} \cdot Q(y) = (n-k-1)! \frac{C_n^{k-1} P_{k-1} y^{k+1}}{1!} + \frac{(n-k)!}{1!} C_n^k P_k y^k + ... + \frac{n!}{(k+1)!}$$

cũng có k+1 nghiệm phân biệt. Lập luận như trên thì:

$R^{(k-1)}(y)$ có 2 nghiệm phân biệt.

$$R^{(k-1)}(y) = \frac{(k+1)! (n-k+1)! C_n^{k-1} P_{k-1} y^2}{2!} + \frac{k! (n-k)!}{1!} C_n^k P_k y$$

$$+ (k-1)! \frac{(n-k-1)!}{2} C_n^{k+1} P_{k+1}$$

hay phương trình: $P_{k+1} y^2 + 2P_k y + P_{k-1} = 0$ có 2 nghiệm

$$\Rightarrow \Delta' \geq 0 \Rightarrow P_k^2 - P_{k+1} P_{k-1} \geq 0 \quad (\text{đpcm})$$

b) Dùng quy nạp theo câu a) ta có: $\sqrt[k]{P_k} \geq \sqrt[k+1]{P_{k+1}}$

• Áp dụng với 5 số a,b,c,d,e > 0 ta có:

$$\frac{a+b+c+d+e}{5} \geq \sqrt{\frac{ab+ac+ad+ae+bc+bd+be+cd+ce+de}{10}}$$

$$\geq \sqrt[3]{\frac{abc+abd+abe+acd+ace+ade+bcd+bce+bde+cde}{10}}$$

$$\geq \sqrt[4]{\frac{abcd+abce+acde+abde+bcd}{5}} \geq \sqrt[5]{abcde}$$

Đây là các bất đẳng thức xen kẽ Cauchy (kẹp chặt hơn)

CÁC BÀI TẬP:

Bài tập 1: Cho 3 số a,b,c tùy ý và m>0 thỏa mãn:

$$\frac{a}{m+2} + \frac{b}{m+1} + \frac{c}{m} = 0$$

Chứng minh: $b^2 - 4ac \geq 0$

Bài tập 2: Chứng minh bất đẳng thức Cauchy-Schwartz:

Với 2n số $(a_i), (b_i), i=1,2,3,...,n$ thì

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right)$$

Bài tập 3: Chứng minh rằng với mọi bộ n số dương phân biệt $a_1, a_2, ..., a_n$

$$\frac{n \sum_{i=1}^n \frac{a_i^n}{\prod_{j=1, j \neq i}^n (a_i - a_j)}}{\prod_{j=1, j \neq i}^n (a_i - a_j)} \geq \sqrt[n]{\prod_{j=1}^n a_j}$$

ta luôn có:

Bài tập 4: Cho a,b,c là 3 số tùy ý.

Chứng minh:

$$6(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \leq 27abc + 10 \sqrt{(a^2+b^2+c^2)^3}$$

Bài tập 5: Không dùng máy tính, chứng minh:

$$\sqrt[3]{\cos \frac{2\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos \frac{4\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos \frac{8\pi}{7}} > \frac{-1}{\sqrt[3]{2}}$$