ĐỀ THI MẪU MÔN TOÁN
THI TUYỂN SINH ĐH, CĐ KHỐI A - 2009

(Thời gian làm bài: 180 phút)

I. PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH (*7,0 điểm*)

Câu I (*2,0 điểm*).

Cho hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + mx + 4$, trong đó *m* là tham số thực.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số đã cho, với *m = 0*.
2. Tìm tất cả các giá trị của tham số *m* để hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Câu II (*2,0 điểm*).

1. Giải phương trình:

$$\sqrt{3}(2\cos^2 x + \cos x - 2) + (3 - 2\cos x)\sin x = 0.$$

2. Giải phương trình:

$$\log_2(x+2) + \log_4(x-5)^2 + \log_{\frac{1}{2}} 8 = 0.$$

Câu III (*1,0 điểm*).

Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{e^x + 1}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = \ln 3, x = \ln 8$.

Câu IV (*1,0 điểm*).

Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình vuông cạnh *a, SA = SB = a,* mặt phẳng (*SAB*) vuông góc với mặt phẳng (*ABCD*). Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp *S.ABD.*

Câu V (*1,0 điểm*).

Xét các số thực dương *x,y,z* thõa mãn điều kiện *x+y+z = 1.*

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^2(y+z)}{yz} + \frac{y^2(z+x)}{zx} + \frac{z^2(x+y)}{xy}.$$

II. PHẦN RIÊNG (*3,0 điểm*)

Thí sinh chỉ được làm một trong hai phần (phần 1 hoặc phần 2).

1. Theo chương trình Chuẩn:

Câu VI.a (*2,0 điểm*).

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho đường tròn (*C*) có phương trình: $x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0.$ Tìm điểm *M* thuộc trục tung sao cho qua *M* kẻ được hai tiếp tuyến của (*C*) mà góc giữa hai tiếp tuyến đó bằng 60^0.

2. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho điểm *M*(2;1;0) và đường thẳng *d* có phương trình tham số:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = -t. \end{cases}$$

Viết phương trình tham số của đường thẳng đi qua điểm *M*, cắt và vuông góc với đường thẳng *d*.

Câu VII.a (*1,0 điểm*).

Tìm hệ số của x^2 trong khai triển thành đa thức của biểu thức:

$P = (x^2 + x - 1)^6.$

2. Theo chương trình Nâng cao:

Câu VI.b (*2,0 điểm*).

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho đường tròn (*C*) có phương trình: $x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$. Tìm điểm *M* thuộc trục tung sao cho qua *M* kẻ được hai tiếp tuyến của (*C*) mà góc giữa hai tiếp tuyến đó bằng 60^0.
2. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho điểm *M*(2;1;0) và đường thẳng *d* có phương trình: $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$.

Viết phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua điểm *M*, cắt và vuông góc với đường thẳng *d*.

Câu VII.b (*1,0 điểm*).

Tìm hệ số của x^3 trong khai trưởng thành đa thức của biểu thức $P = (x^2 + x - 1)^5$.

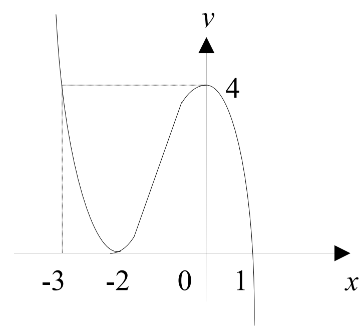
ĐÁP ÁN – THANG ĐIỂM

Câu	***Đáp án***	***Điểm***
I ***(2,0 điểm)***	**1.** ***(1,25 điểm)***	
	Với $m = 0$, ta có hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + 4$. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Sự biến thiên: • Chiều biến thiên: $y' = -3x^2 - 6x$. Ta có: $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2; \\ x = 0 \end{array}\right.$ $y' < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -2; \\ x > 0 \end{array}\right.$ $y' > 0 \Leftrightarrow -2 < x < 0.$ Do đó: + Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -2)$ và $(0; +\infty)$. + Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; 0)$.	***0,50***
	• Cực trị: Hàm số y đạt cực tiểu tại $x = -2$ và $y_{CT} = y(-2) = 0;$ đạt cực đại tại $x = 0$ và $y_{CĐ} = y(0) = 4$. • Giới hạn: $\lim\limits_{x \to -\infty} y = +\infty, \lim\limits_{x \to +\infty} y = -\infty$.	***0,25***
	• Bảng biến thiên:	***0,25***

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		$-$		$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

Đồ thị:

Đồ thị cắt trục tung tại điểm (0; 4), cắt trục hoành tại điểm (1; 0) và tiếp xúc với trục hoành tại điểm (-2; 0).



0,25

2. ***(0,75 điểm)***

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng (0; +∞)

$$\Leftrightarrow y' = -3x^2 - 6x + m \le 0 \quad \forall x > 0$$
$$\Leftrightarrow 3x^2 + 6x \ge m \quad \forall x > 0. \qquad (*)$$

0,25

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = 3x^2 + 6x$ trên (0; +∞):

x	0		$+\infty$
y	0	$\nearrow$	$+\infty$

Từ đó, ta được: (*) $\Leftrightarrow$ *m ≤ 0.*

0,50

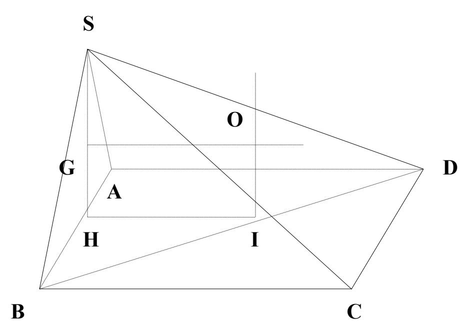
II ***(2,0 điểm)*** **1.** ***(1,0 điểm)***

Phương trình đã cho tương đương với phương trình:

$$\left(2\sin x - \sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}\sin x + \cos x\right) = 0$$

0,50

	$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sqrt{3}\sin x + \cos x = 0 \end{array}\right.$	
	$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = (-1)^n \dfrac{\pi}{3} + n\pi,\ n \in \mathbb{Z} \\ x = -\dfrac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$	***0,50***
	2. *(1,0 điểm)*	
	Điều kiện: $x > -2$ và $x \neq 5$. (*) Với điều kiện đó, ta có: Phương trình đã cho tương đương với phương trình: $\log_2\left[(x+2)\lvert x-5\rvert\right] = \log_2 8$ $\Leftrightarrow (x+2)\lvert x-5\rvert = 8$ $\Leftrightarrow (x^2-3x-18)(x^2-3x-2) = 0$	***0,50***
	$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-3x-18=0 \\ x^2-3x-2=0 \end{array}\right.$ $\Leftrightarrow x = -3 \vee x = 6 \vee x = \dfrac{3\pm\sqrt{17}}{2}.$ Đối chiếu với điều kiện (*), ta được tất cả các nghiệm của phương trình đã cho là: $x = 6$ và $x = \dfrac{3\pm\sqrt{17}}{2}.$	***0,50***
III *(1,0 điểm)*	Ký hiệu S là diện tích cần tính. Vì $\sqrt{e^x+1} > 0\ \forall x \in [\ln 3; \ln 8]$ nên $S = \displaystyle\int_{\ln 3}^{\ln 8} \sqrt{e^x+1}\,dx.$	***0,25***
	Đặt $\sqrt{e^x+1} = t$, ta có $dx = \dfrac{2tdt}{t^2-1.}$ Khi $x = ln3$ thì $t = 2$, và khi $x = ln8$ thì $t = 3$.	***0,25***

	Vì vậy: $S=\int_2^3 \frac{2t^2dt}{t^2-1}=2\left(\int_2^3 dt+\int_2^3 \frac{dt}{t^2-1}\right)$ $=2+\int_2^3 \frac{dt}{t-1}-\int_2^3 \frac{dt}{t+1}$ $=2+\ln\lvert t-1\rvert\Big\vert_2^3-\ln\lvert t+1\rvert\Big\vert_2^3=2+\ln\frac{3}{2}.$	***0,50***
IV ***(1,0 điểm)***	Do *SA = SB = AB (= a)* nên *SAB* là tam giác đều. Gọi *G* và *I* tương ứng là tâm của tam giác đều *SAB* và tâm của hình vuông *ABCD*. Gọi *O* là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp *S.ABD.* Ta có *OG* $\perp$ *(SAB)* và *OI* $\perp$ *(ABCD).*	***0,50***
	 Suy ra: + $OG = IH = \frac{a}{2}$, trong đó *H* là trung điểm của *AB*. + Tam giác *OGA* vuông tại *G*.	***0,25***
	Ký hiệu *R* là bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp *S.ABD*, ta có: $R=OA=\sqrt{OG^2+GA^2}=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{3a^2}{9}}=\frac{a\sqrt{21}}{6}.$	***0,25***
V ***(1,0 điểm)***	Ta có: $P=\frac{x^2}{y}+\frac{x^2}{z}+\frac{y^2}{z}+\frac{y^2}{x}+\frac{z^2}{x}+\frac{z^2}{y}.$ (*)	

	Nhận thấy: $x^2 + y^2 - xy \geq xy \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$. Do đó: $x^3 + y^3 \geq xy(x+y) \quad \forall x, y > 0$, Hay $\dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{x} \geq x + y \quad \forall x, y > 0$.	***0,50***
	Tương tự, ta có: $\dfrac{y^2}{z} + \dfrac{z^2}{y} \geq y + z \quad \forall y, z > 0$; $\dfrac{z^2}{x} + \dfrac{x^2}{z} \geq z + x \quad \forall x, z > 0$. Cộng theo từng vế ba bất đẳng thức vừa nhận được ở trên, kết hợp với (*), ta được: $P \geq 2(x+y+z) = 2 \;\; \forall x, y, z > 0$ *và* $x + y + z = 1$. Hơn nữa,ta lại có *P* = 2 khi x = y = z = $\dfrac{1}{3}$. Vì vậy, min P = 2.	***0,50***
VI.a ***(2,0 điểm)***	**1.** ***(1,0 điểm)***	
	Viết lại phương trình của (*C*) dưới dạng: $(x-3)^2 + y^2 = 4$. Từ đó, (*C*) có tâm *I*(3;0) và bán kính *R = 2.*	***0,25***
	Suy ra trục tung không có điểm chung với đường tròn (*C*). Vì vậy, qua một điểm bất kỳ trên trục tung luôn kẻ được hai tiếp tuyến của (*C*).	***0,25***
	Xét điểm *M(0;m)* tùy ý thuộc trục tung. Qua *M*, kẻ các tiếp tuyến *MA* và *MB* của (*C*) (*A*,*B* là các tiếp điểm). Ta có: Góc giữa hai đường thẳng *MA* và *MB* bằng 60^0	***0,25***

	$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \widehat{AMB} = 60^\circ & (1) \\ \widehat{AMB} = 120^\circ. & (2) \end{array}\right.$	
	Vì MI là phân giác của $\widehat{AMB}$ nên: $(1) \Leftrightarrow \widehat{AMI} = 30^\circ \Leftrightarrow MI = \dfrac{IA}{\sin 30^\circ}$ $\Leftrightarrow MI = 2R \Leftrightarrow \sqrt{m^2+9} = 4 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{7}.$ $(2) \Leftrightarrow \widehat{AMI} = 60^\circ \Leftrightarrow MI = \dfrac{IA}{\sin 60^\circ}$ $\Leftrightarrow MI = \dfrac{2\sqrt{3}R}{3} \Leftrightarrow \sqrt{m^2+9} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ (*) Dễ thấy, không có m thỏa mãn (*). Vậy có tất cả 2 điểm cần tìm là: $(0;-\sqrt{7})$ và $(0;\sqrt{7})$.	***0,25***
	2. ***(1,0 điểm)***	
	Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên d. Ta có MH là đường thẳng đi qua M, cắt và vuông góc với d.	***0,25***
	Vì $H \in d$ nên tọa độ của H có dạng: *(1+2t; -1+t; -t).* Suy ra $\overrightarrow{MH} = (2t-1; -2+t; -t).$ Vì $MH \perp d$ và d có một vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (2;1;-1)$, nên *2(2t-1) + 1.(-2+t) + (-1)(-t) = 0.* Từ đó, ta được $t = \dfrac{2}{3}$. Vì thế, $\overrightarrow{MH} = (\dfrac{1}{3}; -\dfrac{4}{3}; -\dfrac{2}{3}).$	***0,50***
	Suy ra, phương trình tham số của đường thẳng MH là: $\begin{cases} x = 2+t \\ y = 1-4t \\ z = -2t. \end{cases}$	***0,25***

<table>
<tr><td rowspan="4">VII.a (1,0 điểm)</td><td>Theo công thức nhị thức Niu-tơn, ta có:
$$P = C_6^0(x-1)^6 + C_6^1x^2(x-1)^5 + ... + C_6^kx^{2k}(x-1)^{6-k} + ... + C_6^5x^{10}(x-1) + C_6^6x^{12}$$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>Suy ra, khi khai triển P thành đa thức, x^2 chỉ xuất hiện khi khai triển $C_6^0(x-1)^6$ và $C_6^1x^2(x-1)^5$.</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>Hệ số của x^2 trong khai triển của $C_6^0(x-1)^6$ là: $C_6^0.C_6^2$.
Hệ số của x^2 trong khai triển của $C_6^1x^2(x-1)^5$ là: $-C_6^1.C_5^0$.</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>Vì vậy, hệ số của x^2 trong khai triển P thành đa thức là: $C_6^0.C_6^2 - C_6^1.C_5^0 = 9$.</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td rowspan="4">VI.b (2,0 điểm)</td><td colspan="2">1. (1,0 điểm) Xem phần 1 Câu VI.a.</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. (1,0 điểm)</td></tr>
<tr><td>Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên d, ta có MH là đường thẳng đi qua M, cắt và vuông góc với d.</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>d có phương trình tham số là: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = -t. \end{cases}$
Vì $H \in d$ nên tọa độ của H có dạng (1+2t; -1+t; -t).
Suy ra $\overrightarrow{MH} = (2t-1; -2+t; -t)$.
Vì $\overrightarrow{MH} \perp d$ và d có một vectơ chỉ phương là
$\vec{u} = (2;1;-1)$, nên
$$2(2t-1) + 1.(-2+t) + (-1)(-t) = 0.$$
Từ đó, ta được $t = \frac{2}{3}$.
Vì thế, $\overrightarrow{MH} = \left(\frac{1}{3}; -\frac{4}{3}; -\frac{2}{3}\right)$.</td><td>0,50</td></tr>
</table>

	Suy ra, phương trình chính tắc của đường thẳng *MH* là: $\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{-4}=\frac{z}{-2}.$	***0,25***
VII.b ***(1,0 điểm)***	Theo công thức nhị thức Niu-tơn ta có: $P=C_5^0(x-1)^5+C_5^1x^2(x-1)^4+\ldots$ $+C_5^kx^{2k}(x-1)^{5-k}+\ldots+C_5^4x^8(x-1)+C_5^5x^{10}.$	***0,25***
	Suy ra, khi khai triển *P* thành đa thức, x^3 chỉ xuất hiện khi khai triển $C_5^0(x-1)^5$ và $C_5^1x^2(x-1)^4$.	***0,25***
	Hệ số của x^3 trong khai triển của $C_5^0(x-1)^5$ là $C_5^0C_5^3$. Hệ số của x^3 trong khai triển của $C_5^1x^2(x-1)^4$ là $-C_5^1.C_4^1$.	***0,25***
	Vì vậy, hệ số của x^3 trong khai triển *P* thành đa thức là: $C_5^0.C_5^3-C_5^1.C_4^1=-10.$	***0,25***

Nguồn: Cục Khảo thí và Kiểm định chất lượng giáo dục (Bộ GD-ĐT).

Hướng dẫn: Trung tâm Luyện thi Vĩnh Viễn.