

RÈN LUYỆN CHO HỌC SINH THÓI QUEN *TỔNG QUÁT* VÀ *TONG TỰ*
QUA LỜI GIẢI MỘT SỐ BÀI TOÁN

Nguyễn Duy Thái Sơn

Trường THPT chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng

Báo cáo này thực ra là nội dung của một bài giảng chuyên đề mà tôi vừa tiến hành (trong một buổi) cho khối 11 chuyên Toán trường THPT chuyên Lê Quý Đôn thành phố Đà Nẵng, với mục tiêu là rèn luyện học sinh thói quen *tổng quát* và *tong tự*, những thao tác rất cần thiết trong công tác nghiên cứu.

A. TỔNG QUÁT HÓA MỘT BÀI TOÁN TRÊN CÁC LỖI VUÔNG

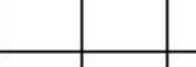
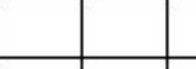
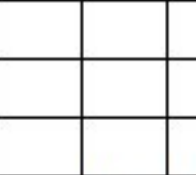
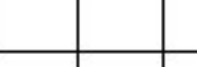
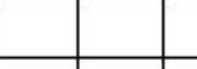
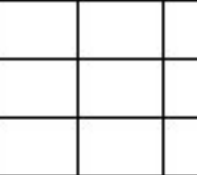
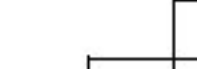
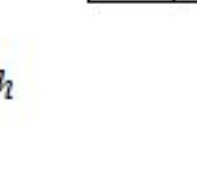
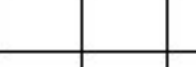
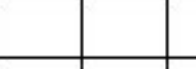
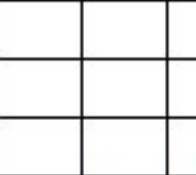
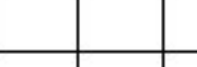
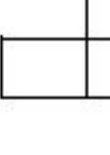
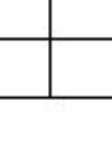
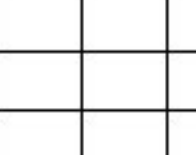
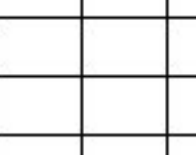
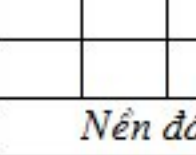
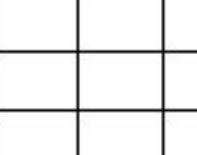
Hình học tổ hợp là một chủ đề rất hay đọc quan tâm tại các kỳ thi Vô địch Toán các nóc cũng nh tại các kỳ thi Vô địch Toán quốc tế. Sau đây là một kiểu toán khá phổ biến liên quan đến các lỗi vuông:

Bài toán I (bài 3, vòng 4, kỳ thi Vô địch Toán Belarus 1999): *Có một nền đất hình vuông với kích thước 7×7 được chia thành 49 ô vuông đơn vị, và có ba loại gạch lát nền:*

- loại 1: *gạch có bề mặt hình vuông với kích thước 1×1 ,*
- loại 2: *gạch có bề mặt hình chữ nhật với kích thước 3×1 ,*
- loại 3: *gạch có bề mặt hình góc vuông, phủ vừa ba ô vuông đơn vị (xem hình vẽ).*

Giả sử Jerry có một viên gạch loại 3 và vô số viên gạch loại 2, trong khi Tom chỉ có một viên gạch loại 1. Chứng minh rằng Tom có thể lát viên gạch của mình lên một ô vuông đơn vị nào đó trên nền đất để Jerry không thể lát khít (tức là các viên gạch không hề chồng lên nhau) toàn bộ phần còn lại của nền bằng số gạch mà Jerry có.

1. *Chúng mình rằng Tom có thể lát viên gạch của mình lên một ô vuông đơn vị nào đó trên nền đất để Jerry không thể lát khít (tức là các viên gạch không hề chồng lên nhau) toàn bộ phần còn lại của nền bằng số gạch mà Jerry có.*
2. *Giả sử Jerry có thêm một viên gạch loại 3 nữa. Chứng minh rằng dù Tom lát viên gạch của mình ở đâu trên nền đất (miễn sao viên gạch đó phủ đúng một ô vuông đơn vị) thì Jerry cũng có thể lát khít toàn bộ phần còn lại của nền bằng số gạch mà lần này hần có.*

Loại 1:							
Loại 2:							
Loại 3:							
Các loại gạch							

Giải:

1. Tom chỉ cần lát viên gạch của mình vào ô vuông đơn vị được đánh dấu x nh trong hình vẽ dưới đây thì Jerry sẽ không thể lát khít toàn bộ phần còn lại của nền bằng số gạch mà Jerry có.

Thật vậy, hãy đánh số các ô vuông đơn vị còn lại của nền đất theo cách nh hình vẽ đã chỉ ra: có 17 ô vuông đơn vị chứa số 0, 15 ô vuông đơn vị chứa số 1 và 16 ô vuông đơn vị chứa số 2. Giả sử Jerry lát khít được toàn bộ phần còn lại của nền bằng số gạch mà hần có. Khi đó, mỗi viên gạch loại 2 của hần cần phủ đúng ba ô vuông đơn vị liên tiếp nhau trên một hàng hoặc trên một cột, nghĩa là phủ một ô vuông đơn vị chứa số 0, một ô vuông đơn vị chứa số 1 và một ô vuông đơn vị chứa số 2; vì thế, viên gạch loại 3 của Jerry phải phủ hai ô vuông đơn vị chứa số 0 và một ô vuông đơn vị chứa số 2.

Trước hết, từ đó ta suy ra: Jerry không thể lát viên gạch có bề mặt hình góc vuông này theo vị trí của các “chữ” $\begin{smallmatrix} \text{┌} \\ \text{└} \end{smallmatrix}$, hay $\begin{smallmatrix} \text{└} \\ \text{┌} \end{smallmatrix}$. Thật vậy, kiểm tra trực tiếp, ta thấy: ở vị trí $\begin{smallmatrix} \text{┌} \\ \text{└} \end{smallmatrix}$ hay $\begin{smallmatrix} \text{└} \\ \text{┌} \end{smallmatrix}$, viên gạch sẽ phủ ba ô vuông đơn vị chứa ba số khác nhau; còn ở vị trí $\begin{smallmatrix} \text{┌} \\ \text{┌} \end{smallmatrix}$, viên gạch sẽ phủ hai ô vuông đơn vị chứa số 0 và một ô vuông đơn vị chứa số 1, hoặc hai ô vuông đơn vị chứa số 1 và một ô vuông đơn vị chứa số 2, hoặc hai ô vuông đơn vị chứa số 2 và một ô vuông đơn vị chứa số 0;

nghĩa là, đều không đạt yêu cầu.

Cuối cùng, viên gạch đó cũng không thể có vị trí của chữ $\begin{smallmatrix} \text{┐} \\ \text{┐} \end{smallmatrix}$, bởi vì: nếu một cách lát nh thế giúp Jerry đạt được mục đích thì phép đối xứng qua cột chứa viên gạch của Tom sẽ cho Jerry một cách lát khác cũng đạt được mục đích, nhng - theo cách lát mới này - viên gạch có bề mặt hình góc vuông lại nằm ở vị trí $\begin{smallmatrix} \text{┌} \\ \text{└} \end{smallmatrix}$, mâu thuẫn với nhận xét mà ta vừa rút ra ở đoạn trên! Mâu thuẫn đó chứng tỏ rằng Jerry không thể lát khít toàn bộ phần còn lại của nền bằng số gạch mà Jerry có.

Với phương pháp nh trên, ta có thể giải được bài toán tổng quát sau đây:

Bài toán I.1(n): *Cho n là một số nguyên dương. Có một nền đất hình vuông với kích thước $(6n+1)\times(6n+1)$ được chia thành $(6n+1)^2$ ô vuông đơn vị, và có ba loại gạch lát nền:*

- loại 1: *gạch có bề mặt hình vuông với kích thước 1×1 ,*
- loại 2: *gạch có bề mặt hình chữ nhật với kích thước 3×1 ,*
- loại 3: *gạch có bề mặt hình góc vuông, phủ vừa ba ô vuông đơn vị.*

Giả sử Jerry có một viên gạch loại 3 và vô số viên gạch loại 2, trong khi Tom chỉ có một viên gạch loại 1. Chứng minh rằng Tom luôn có thể lát viên gạch của mình lên một ô vuông đơn vị nào đó trên nền đất để Jerry không thể lát khít toàn bộ phần còn lại của nền bằng số gạch mà Jerry có.

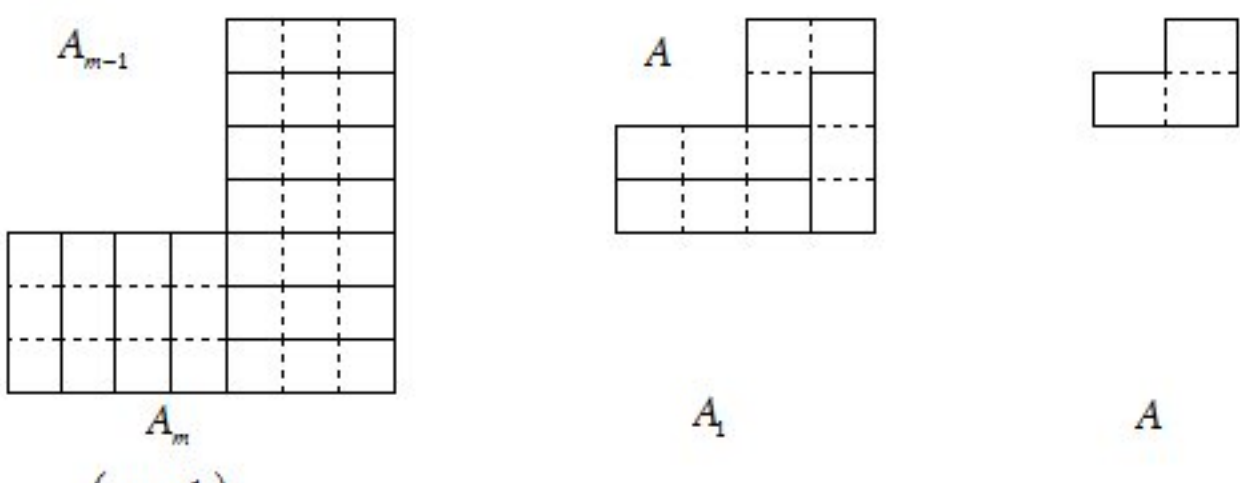
Lời giải (gợi ý): Với mỗi i, j nguyên mà $1\leq i, j\leq 6n+1$, lấy $a_{i,j}$ là phần d trong phép chia $i+j+1$ cho 3, và điền số $a_{i,j}$ vào ô vuông đơn vị ở hàng thứ i (tính từ trên xuống dưới), cột thứ j (tính từ trái qua phải) của nền đất. Tom chỉ cần lát viên gạch của mình vào ô vuông đơn vị ở hàng thứ $6n-1$, cột thứ $3n+1$ (cột đối xứng của nền đất). Do $a_{6n-1,3n+1}=1$, phần còn lại của nền sẽ bao gồm $12n^2+4n+1$ ô vuông đơn vị chứa số 0, $12n^2+4n-1$ ô vuông đơn vị chứa số 1 và $12n^2+4n$ ô vuông đơn vị chứa số 2. Các lập luận tiếp theo hoàn toàn giống các lập luận trong lời giải bài toán I.1.

2. Bây giờ, ta giải một bài toán tổng quát khác:

Bài toán I.2(m): *Cho m là một số nguyên dương. Có một nền đất hình vuông với kích thước $(3m+1)\times(3m+1)$ được chia thành $(3m+1)^2$ ô vuông đơn vị, và có ba loại gạch lát nền:*

- loại 1: *gạch có bề mặt hình vuông với kích thước 1×1 ,*
- loại 2: *gạch có bề mặt hình chữ nhật với kích thước 3×1 ,*
- loại 3: *gạch có bề mặt hình góc vuông, phủ vừa ba ô vuông đơn vị.*

Giả sử Jerry có hai viên gạch loại 3 và vô số viên gạch loại 2, trong khi Tom chỉ có một viên gạch loại 1. Chứng minh rằng dù Tom lát viên gạch của mình ở đâu trên nền đất (miễn sao viên gạch đó phủ đúng một ô vuông đơn vị) thì Jerry cũng có thể lát khít toàn bộ phần còn lại của nền bằng số gạch mà hần có.



Lời giải của bài toán I.2(m):

Gọi A_m là nền đất hình vuông có trong đề toán, còn A_{m-1} là hình vuông *con* với kích thước $[3(m-1)+1]\times[3(m-1)+1]$ bao gồm các ô vuông đơn vị trong A_m có số thứ tự hàng và số thứ tự cột không vọt quá $3(m-1)+1$. Khi $m>1$, ta sẽ xoay hình vuông A_m quanh tâm của nó (sau đó, đối chiếu đếm thứ tự các hàng, các cột trong A_m) nếu cần; vì vậy, có thể giả sử viên gạch của Tom nằm trong A_{m-1} ; hơn nữa, ta cũng dễ dàng thấy rằng: chỉ dùng các viên gạch loại 2, Jerry có thể lát khít được toàn bộ $A_m\setminus A_{m-1}$ (xem hình vẽ). Vì thế, bằng quy nạp, ta đa bài toán về trường hợp $m=1$:

A_1 là một hình vuông có kích thước 4×4 . Nếu cần ta sẽ xoay hình vuông A_1 rồi đối chiếu đếm thứ tự các hàng, các cột của nó, ta có thể giả sử viên gạch của Tom nằm trong hình vuông A_1 có kích thước 2×2 bao gồm các ô vuông đơn vị có số thứ tự hàng và số thứ tự cột không vọt quá 2. Chỉ dùng một viên gạch loại 3 và ba viên gạch loại 2, Jerry có thể lát khít được toàn bộ $A_1\setminus A_1$ (theo cách nh hình vẽ). Viên gạch loại 3 còn lại sẽ được Jerry sử dụng để lát khít ba ô vuông đơn vị còn trống trong A_1 .

Bài toán được giải quyết trọn vẹn trong trường hợp $m=1$, và do đó cả trong trường hợp m bất kỳ.

Bài tập

Giải (và tổng quát hoá) bài toán sau đây (bài 4, kỳ thi Vô địch Toán Ireland 1999): *Ngời ta phải lát gạch cho một sân nhà hình vuông với kích thước 100×100 và chỉ sử dụng loại gạch có bề mặt hình chữ nhật với kích thước 3×1 (mỗi viên phủ vừa ba ô vuông đơn vị trên sân nhà).*

1. *Tại tâm sân nhà, khoét một hình vuông với kích thước 2×2 . Chứng minh rằng phần còn lại của sân nhà có thể được lát khít bởi loại gạch đã cho.*
2. *Tại góc sân nhà (thay vì tại tâm sân nhà), khoét một hình vuông với kích thước 2×2 . Chứng minh rằng không thể lát khít toàn bộ phần còn lại của sân nhà bằng loại gạch đã cho.*

B. TONG TỰ HÓA MỘT BÀI TOÁN LỢNG GIÁC

Trong mục này, trước hết, ta xét một bài toán lợng giác không quá khó (nhng khá hay), nh sau:

Bài toán II (từ một đề thi Vô địch Toán Romania 1996): *Cho x và y là hai số thực. Chứng minh rằng nếu $S:=\{\cos(qx\pi)+\cos(qy\pi)\mid q\in\mathbf{Z}\}$ là một tập hợp hữu hạn, thì x và y đều là các số hữu tỉ.*

Lời giải (nhiều học sinh đã giải được theo cách này): Để đơn giản, đặt

$$a_q:=\cos(qx\pi), b_q:=\cos(qy\pi) \quad (q\in\mathbf{Z}).$$

Từ công thức tính cosin của góc nhân đôi, ta có

$$\forall q\in\mathbf{Z}, (a_q+b_q)^2+(a_q-b_q)^2=2(a_q^2+b_q^2)=2+a_{2q}+b_{2q}.$$

Nhng

$$a_q=\frac{1}{2}[(a_q+b_q)+(a_q-b_q)], b_q=\frac{1}{2}[(a_q+b_q)-(a_q-b_q)],$$

nên (1) cho thấy, khi tập $S=\{a_q+b_q\mid q\in\mathbf{Z}\}$ hữu hạn, tập $\{a_q-b_q\mid q\in\mathbf{Z}\}$ và do đó các tập $\{a_q\mid q\in\mathbf{Z}\}, \{b_q\mid q\in\mathbf{Z}\}$ cũng hữu hạn. Vậy, tồn tại

$$q_1, q_2\in\mathbf{N} \text{ với } q_1\neq q_2, a_{q_1}=a_{q_2}; \text{ từ đó, tìm được } k\in\mathbf{Z} \text{ để } x=\frac{2k}{q_1\pm q_2}\in\mathbf{Q}.$$

Tong tự, ta có $y\in\mathbf{Q}$ (đpcm).

Dễ thấy tính hữu tỉ của x và y cũng là điều kiện đủ để tập $\{\cos(qx\pi)+\cos(qy\pi)\mid q\in\mathbf{Z}\}$ hữu hạn. Một cách tự nhiên, dưới đây ta có thể đặt một số bài toán tong tự:

Bài toán III: *Với x và y là hai số thực, xét tập hợp*

$$S:=\{\sin(qx\pi)+\sin(qy\pi)\mid q\in\mathbf{Z}\}.$$

Hãy tìm điều kiện cần và đủ (đối với các số x và y) để S là một tập hợp hữu hạn.

Giải: Ta sẽ chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để S hữu hạn là:

$$(\exists k\in\mathbf{Z}, x+y=2k)\vee(x\in\mathbf{Q}\wedge y\in\mathbf{Q}).$$

Điều kiện đó thì *không* quá bất ngờ, nhng cũng dự báo được rằng phương pháp giải mà ta sắp sử dụng sẽ không thể hoàn toàn giống trước.

Lần này, ta ký hiệu $a_q:=\sin(qx\pi), b_q:=\sin(qy\pi) \quad (q\in\mathbf{Z})$.

1) **Điều kiện đủ:** Rõ ràng, khi $x+y=2k$, với $k\in\mathbf{Z}$, thì sẽ có $b_q=\sin(2kq\pi-qx\pi)=-a_q \quad (\forall q\in\mathbf{Z})$; nên $A=\{0\}$ là một tập hữu hạn.

Bây giờ, giả sử $x\in\mathbf{Q}$ và $y\in\mathbf{Q}$, tức là tồn tại $m, n, p\in\mathbf{Z}, m>0$, mà $x=n/m, y=p/m$. Khi đó, với mỗi $q\in\mathbf{Z}$, ta tìm được các số $k, r\in\mathbf{Z}$ sao

$$\begin{cases} a_q=\sin(2kn\pi+rx\pi)=a_r \\ b_q=\sin(2kp\pi+ry\pi)=b_r. \end{cases} \text{ Vậy } S=\{a_r+b_r\mid r\in[0;2m)\cap\mathbf{Z}\} \text{ cũng là một tập hữu hạn.}$$

2) **Điều kiện cần:** Giả sử S hữu hạn. Đặt $\mathcal{M}:=\{q\in\mathbf{Z}\mid a_q+b_q\neq 0\}$ và $\mathcal{P}:=\{a_qb_q\mid q\in\mathcal{M}\}$. Từ công thức tính sin của góc nhân ba, ta thấy

$(\forall q\in\mathbf{Z})$:

$$a_qb_q(a_q+b_q)=\frac{1}{3}(a_q+b_q)^3-\frac{1}{4}(a_q+b_q)+\frac{1}{12}(a_{3q}+b_{3q}),$$

suy ra $\mathcal{P}$ là một tập hữu hạn. Mặt khác, ứng với mỗi $q\in\mathcal{M}$, thì a_q và b_q là các nghiệm của một phương trình bậc hai có dạng $t^2-st+p=0$, trong đó $s:=a_q+b_q\in S, p:=a_qb_q\in\mathcal{P}$. Chỉ có hữu hạn phương trình nh thế, nên $\{a_q\mid q\in\mathcal{M}\}$ và $\{b_q\mid q\in\mathcal{M}\}$ đều là các tập hữu hạn. Thành thử:

1. Khi $\mathcal{M}$ vô hạn, ắt tồn tại $q_1, q_2\in\mathcal{M}\subset\mathbf{Z}, q_1\neq q_2$, sao cho $a_{q_1}=a_{q_2}$; nghĩa là,

$$\begin{aligned} \sin(q_1x\pi)&=\sin(q_2x\pi) \\ \Rightarrow \exists k\in\mathbf{Z}, x&=-\frac{2k}{q_1-q_2}\vee x=\frac{2k+1}{q_1+q_2} \quad (q_1+q_2\neq 0) \\ \Rightarrow x&\in\mathbf{Q}. \end{aligned}$$

Tong tự, $y\in\mathbf{Q}$, tức là có (2).

2. Khi $\mathcal{M}$ hữu hạn, tồn tại $q_0\in\mathbf{N}$ sao cho

$$\forall q\in\mathbf{Z}, q>q_0\Rightarrow \sin(qx\pi)+\sin(qy\pi)=0$$

$$\Rightarrow 2\sin\left[\frac{q}{2}(x+y)\pi\right]\cdot\cos\left[\frac{q}{2}(x-y)\pi\right]=0$$

$$\Rightarrow \exists k_q\in\mathbf{Z}, \begin{cases} x+y=2k_q/q \\ x-y=(2k_q+1)/q. \end{cases}$$

Bấy giờ, xét tùy ý một số $q\in\mathbf{Z}$ mà $q>q_0$. Ta có nhận xét: không thể xảy ra trường hợp $x-y=\frac{2k_{q+1}+1}{q+1}=\frac{2k_q+1}{q}$; bởi vì trường hợp này sẽ dẫn đến nghịch lý

$$(q+1)(2k_q+1)=q(2k_{q+1}+1)$$

(một trong hai vế của đẳng thức đó là một số nguyên chẵn, trong khi vế kia là một số nguyên lẻ)! Để hoàn thành việc chứng minh (2), ta có thể xem rằng $x\notin\mathbf{Q}\vee y\notin\mathbf{Q}$; khi đó, $x+y\notin\mathbf{Q}\vee x-y\notin\mathbf{Q}$; vì thế theo (3), và theo nhận xét vừa nêu, ta chỉ còn phải nghiên cứu trường hợp

$$x+y=\frac{2k_{q+1}}{q+1}=\frac{2k_q}{q}; \text{ mà chính lúc này, ta có } x+y=\frac{2k_{q+1}-2k_q}{(q+1)-q}=2k, \text{ với } k=k_{q+1}-k_q\in\mathbf{Z}; \text{ nghĩa là có (2), đpcm.}$$

Bài toán IV: *Với x và y là hai số thực, xét tập hợp*

$$S:=\{\cos(qx\pi)+\sin(qy\pi)\mid q\in\mathbf{Z}\}$$

Hãy tìm điều kiện cần và đủ (đối với các số x và y) để S là một tập hợp hữu hạn.

Giải: Đặt $a_q:=\cos(qx\pi), b_q:=\sin(qy\pi) \quad (q\in\mathbf{Z})$. Trong bài toán này, nhờ có bao hàm thức

$$\{a_q+b_q\mid q\in\mathbf{Z}\}=\{a_q-b_q\mid q\in\mathbf{Z}\},$$

ta thấy: S là một tập hữu hạn khi và chỉ khi $\{a_q\mid q\in\mathbf{Z}\}$ và $\{b_q\mid q\in\mathbf{Z}\}$ đều là các tập hữu hạn. Từ đó suy ra điều kiện phải tìm là $x\in\mathbf{Q}\wedge y\in\mathbf{Q}$.

Tuy nhiên, với bài toán sau, tình hình sẽ không còn đơn giản đến nh vậy:

Bài tập

Với x và y là hai số thực, xét tập hợp $S:=\{\cos(qx\pi)+\sin(qy\pi)\mid q\in\mathbf{N}\}$. *Hãy tìm điều kiện cần và đủ (đối với các số x và y) để S là một tập hợp hữu hạn.*