

ỨNG DỤNG CỦA NGUYÊN LÝ BÙ TRỪ TỔNG QUÁT
THE USE OF GENERAL COMPENSATIVE SUCTRACTIVE PRINCIPLE

NGUYỄN VĂN THÔNG
GV Trường THPT Chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng

TÓM TẮT :
Nguyên lý bù trừ tổng quát có rất nhiều ứng dụng trong các bài toán sơ cấp, các bài toán rời rạc. Ứng dụng mạnh nhất của nguyên lý này là giải quyết được bài toán đếm số toàn ảnh từ tập có m phần tử đến tập có n phần tử và bài toán người đưa thư. Một số bài toán trong các kỳ thi toán quốc tế cũng giải được bằng phương pháp này.
Bài báo này nhằm nêu ra những ứng dụng nhằm giải quyết được một số bài toán quan trọng đó.

ABSTRACT :
The general compensative, subtractive principle has many uses in elementary and discrete problems. The strongest use of this principle is solving the counting surjective problems from the set which has m elements to n elements and caterer problems. Some problems in the International Mathematical Examination, have been solved by this method.
This artical shows all the uses to solve some of these unportant problems.

1. MỞ ĐẦU :
Một số bài toán thực tế và các bài toán thi học sinh giỏi toàn quốc và các bài toán thi Olympic toán quốc tế thường rất khó đối với học sinh vì lý do là các lý thuyết tổng quát chưa được trang bị đầy đủ. những ứng dụng sâu sắc chưa được thiết kế trên diện rộng, và các ứng dụng của nguyên lý bù trừ tổng quát thường chưa được phổ biến. Qua phần này tác giả muốn nêu lên được nguyên lý đó và các ứng dụng.
2. NỘI DUNG : CÔNG THỨC BÙ TRỪ TỔNG QUÁT

Giả sử A_i là tập con chứa các phần tử có tính chất P_i , số các phần tử có tất cả các tính chất $P_1, P_2, \dots, P_n$ được kí hiệu là $N(P_1 P_2 \dots P_n)$. Viết các đại lượng trên qua các tập hợp ta có :

$$|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n| = N(P_1 P_2 \dots P_n)$$

Nếu số các phần tử không có tính chất nào trong số n tính chất $P_1, P_2, \dots, P_n$ được kí hiệu là $N(P_1' P_2' \dots P_n')$ và số các phần tử trong tập hợp đã cho là N, thì ta suy ra rằng :

$$N(P_1' P_2' \dots P_n') = N - |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n|$$

Mặt khác, theo nguyên lý bù trừ:

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| &= \sum_{1 \leq i \leq n} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| \\ &+ \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n| \end{aligned}$$

Do đó,

$$\begin{aligned} N(P_1' P_2' \dots P_n') &= N - \sum_{1 \leq i \leq n} N(P_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} N(P_i P_j) \\ &- \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} N(P_i P_j P_k) + \dots + (-1)^n N(P_1 P_2 \dots P_n) \end{aligned}$$

Ứng dụng đầu tiên là tìm số nghiệm nguyên của phương trình vô định nhiều ẩn.

Bài toán 1 :
Phương trình : $x_1 + x_2 + x_3 = 11$
Có bao nhiêu nghiệm nguyên, trong đó x_1, x_2 và x_3 là các số nguyên không âm với $x_1 \leq 3, x_2 \leq 4$ và $x_3 \leq 6$?
Lời giải

Gọi nghiệm có tính chất P_1 là $x_1 > 3$, có tính chất P_2 là $x_2 > 4$ và tính chất P_3 là $x_3 > 6$. Khi đó, số nghiệm thỏa các bất đẳng thức $x_1 \leq 3, x_2 \leq 4$ và $x_3 \leq 6$ bằng :

$$\begin{aligned} N(P_1' P_2' P_3') &= N - N(P_1) - N(P_2) - N(P_3) + N(P_1 P_2) \\ &+ N(P_1 P_3) + N(P_2 P_3) - N(P_1 P_2 P_3) \end{aligned}$$

Mà ta có :

$$N = (\text{tổng số nghiệm}) = C_{3+4+6-1}^{11} = 78$$

$$N(P_1) = (\text{số nghiệm với } x_1 \geq 4) = C_{3+7-1}^7 = 36.$$

$$N(P_2) = (\text{số nghiệm với } x_2 \geq 5) = C_{3+6-1}^6 = 28.$$

$$N(P_3) = (\text{số nghiệm với } x_3 \geq 7) = C_{3+4-1}^4 = 15.$$

$$N(P_1 P_2) = (\text{số nghiệm với } x_1 \geq 4 \text{ và } x_2 \geq 5) = C_{3+2-1}^2 = 6.$$

$$N(P_1 P_3) = (\text{số nghiệm với } x_1 \geq 4 \text{ và } x_3 \geq 7) = C_{3+0-1}^0 = 1.$$

$$N(P_2 P_3) = (\text{số nghiệm với } x_2 \geq 5 \text{ và } x_3 \geq 7) = 0.$$

$$N(P_1 P_2 P_3) = (\text{số nghiệm với } x_1 \geq 4, x_2 \geq 5 \text{ và } x_3 \geq 7) = 0.$$

Do đó :

$$N(P_1' P_2' P_3') = 78 - 36 - 28 - 15 + 6 + 1 + 0 - 0 = 6$$

Kết luận : Vậy số nghiệm nguyên của phương trình trên là 6.
Bài toán đếm số toàn ảnh từ một tập có m phần tử đến một tập có n phần tử cũng được giải quyết trọn vẹn sau đây.

Bài toán 2 :
Giả sử m và n là 2 số nguyên dương với $m \geq n$. Khi đó, số hàm toàn ánh từ tập m phần tử đến tập n phần tử bằng $n^m - C_n^1 (n-1)^m + C_n^2 (n-2)^m - \dots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} 1^m$.

Lời giải
Gọi A là số toàn ánh từ m phần tử vào n phần tử.
 $\forall i \in [1, n] \cap \mathbb{Z}$, kí hiệu A_i là số toàn ánh f mà $\forall a \in M, f(a) \neq i$.
Trong đó, M = tập m phần tử.
 $N \equiv$ tập n phần tử.
Khi đó, nếu gọi S là tập hợp tất cả các ánh xạ từ M vào N thì :
 $|A| = |S| - \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right|$
Để thấy rằng, số ánh xạ ngẫu nhiên từ x phần tử vào y phần tử là y^x (Đã chứng minh trong tạp chí Khoa học và Công nghệ số 3/20/07).
Thật vậy : Phần tử thứ nhất có y khả năng này sinh ánh xạ vào tập y phần tử. Cứ như vậy, x phần tử sẽ có y^x ánh xạ từ x phần tử vào y phần tử.
Do đó, $|S| = n^m, |A_i| = (n-1)^m$
 $|A_i \cap A_j| = (n-2)^m$ (các ánh xạ từ m phần tử vào n - 2 phần tử).
Tương tự, $|A_i \cap A_j \cap \dots \cap A_k| = (n-k)^m$ với $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$.
Từ đó,
 $\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{i=1}^n (n-1)^m - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} (n-2)^m + \dots + (-1)^{n-2} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{n-1} \leq n} [n - (n-1)]^m$
 $= C_n^1 (n-1)^m - C_n^2 (n-2)^m + \dots + (-1)^{n-2} C_n^{n-1}$
Vậy, $|A| = n^m - C_n^1 (n-1)^m + C_n^2 (n-2)^m + \dots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} 1^m$.

Bài toán 3 :
Số mất thứ tự của một tập gồm n phần tử bằng.
 $D_n = n! \left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right]$
(Một mất thứ tự là một hoán vị của n phần tử mà không có phần tử nào giữ nguyên thứ tự ban đầu của nó).
Lời giải
Giả sử một hoán vị có tính chất P_i nếu nó không làm thay đổi vị trí của phần tử i $\forall i \in [1, n] \cap \mathbb{Z}$.
Điều này có nghĩa là $D_n = N(P_1' P_2' \dots P_n')$
Theo nguyên lý bù trừ ta có :
 $D_n = N - \sum_{1 \leq i \leq n} N(P_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} N(P_i P_j) - \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} N(P_i P_j P_k) + \dots + (-1)^n N(P_1 P_2 \dots P_n)$
Trước hết, thấy ngay rằng : N = n!, vì N là tổng số các hoán vị của n phần tử. Cũng như vậy, $N(P_i) = (n-1)!$
Và một cách tổng quát, ta có :
 $N(P_i P_j \dots P_k) = (n-m)!$ $\forall m \in [1, n] \cap \mathbb{Z}$
Vì đây là hoán vị giữ nguyên m phần tử $i_1, i_2, \dots, i_m$ và (n - m) phần tử còn lại có thể sắp xếp tùy ý.
Lại có C_n^m cách để chọn m trong số n phần tử nên ta có :
 $\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n} N(P_i P_j \dots P_k) = C_n^m (n-m)!$
Do đó,
 $D_n = n! - C_n^1 (n-1)! + C_n^2 (n-2)! - \dots + (-1)^n C_n^n (n-n)!$
 $= n - \frac{n!}{1!(n-1)!} \cdot (n-1)! + \frac{n!}{2!(n-2)!} (n-2)! - \dots + (-1)^n \frac{n!}{n!0!}$
 $= n! \left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right]$
Sau khi đã giải quyết được bài toán 3 chúng ta có thể giải quyết bài toán người đưa thư về xác suất như sau.

Bài toán 3' :
Có n lá thư và n phong bì ghi sẵn địa chỉ. Bỏ ngẫu nhiên các thư vào các phong bì sao cho mỗi phong bì chỉ chứa một thư. Hỏi xác suất để xảy ra mọi lá thư đều cho vào phong bì sai địa chỉ của nó là bao nhiêu ?
Lời giải.
Để thấy rằng số các cách xếp thư vào phong bì sao cho mọi thư đều cho vào phong bì sai địa chỉ của nó bằng D_n , còn số tất cả các cách xếp thư vào phong bì bằng n!. Do đó xác suất P cần tìm bằng.

$$P = \frac{D_n}{n!} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!}.$$

Tiếp tục chúng ta vận dụng nguyên lý bù trừ tổng quát để giải một số đề thi toán quốc tế (IMO) và đề thi cho học sinh giải toán của một số nước.

Bài toán 4 : (Chọn học sinh giỏi toán Trung Quốc 2004)
Cho các số nguyên dương k, n thỏa mãn điều kiện $n > k^2 - k + 1$. Giả sử n tập

$A_1, A_2, \dots, A_n$ thỏa mãn đồng thời 2 điều kiện.
i) $|A_i| = k \quad \forall i \in [1, n] \cap \mathbb{Z}$
ii) $|A_i \cup A_j| = 2k - 1 \quad \forall i, j \in [1, n] \cap \mathbb{Z}$ và $i < j$

Hãy xác định số phần tử của tập $\bigcup_{i=1}^n A_i$?

Lời giải :
Ta có : $|A_i \cup A_j| = |A_i| + |A_j| - |A_i \cap A_j|$
Nên từ i) và ii) suy ra : $|A_i \cap A_j| = 1 \quad \forall i, j \in [1, n] \cap \mathbb{Z}, i < j$ (*)
Xét tập bất kì, chẳng hạn A_1 từ (*) có $|A_1 \cap A_i| = 1 \quad \forall i \in [1, n] \cap \mathbb{Z}$
Vì $|A_i| = k$ nên theo nguyên lý Dirichlet phải tồn tại ít nhất một phần tử $a \in A_1$ là phần tử chung của không ít hơn m trong số các tập $A_2, A_3, \dots, A_n$ với $m \geq \frac{n-1}{k} > k-1$ (**)
Giả sử ngược lại, mọi phần tử của A_1 đều không thuộc quá m trong số các tập

$A_2, A_3, \dots, A_n$ với $m < \frac{n-1}{k}$. Từ (*) suy ra mỗi $a_i \in A_1 (i \in [1, k] \cap \mathbb{Z})$ tương ứng với không quá $m \left(< \frac{n-1}{k} \right)$ tập khác nhau trong số các tập $A_2, A_3, \dots, A_n$. Bởi vậy, số các tập đã cho sẽ nhỏ hơn $\frac{n-1}{k} k + 1 = n$.

Nếu $m < n - 1$, thì sẽ tồn tại $A_j (j \in [1, n] \cap \mathbb{Z})$ mà A_j không thuộc A_j . Kí hiệu phần tử chung duy nhất của A_j với A_1 bằng b_i với $A_{it} (1 \leq t \leq m)$ bằng a_{it} . Khi đó.

$$\forall i \in [1, m] \cap \mathbb{Z}, a_{it} \neq b \text{ và } \forall t, s \in [1, m] \cap \mathbb{Z}, s < t, s \neq t \Rightarrow a_{it} \neq a_{is}$$

Thật vậy, nếu $\exists t (1 \leq t \leq m)$ mà $a_{it} = b$, thì A_1 và A_{it} có ít nhất hai phần tử chung là a và a_{is} , nên mâu thuẫn với (*). Nếu $\exists t (1 \leq t \leq m)$ mà $a_{is} = a$ nhưng $a_{is} = a_{it}$ thì A_{is} và A_{it} có ít nhất hai phần tử chung là a và a_{is} nên mâu thuẫn (*).

$$\text{Do đó, } A_j \text{ chứa ít nhất } m + 1 \text{ phần tử khác nhau : } b, a_1, a_2, \dots, a_m \quad |A_j| \geq m + 1 > k. \text{ Mâu thuẫn giả thiết i).}$$

Bởi vậy, $m = n - 1$ và $\bigcap_{i=1}^m A_i = \{a\}$.

$$\forall i \in [1, n] \cap \mathbb{Z} \text{ dùng } a_i^j \text{ để kí hiệu các phần tử khác a và thuộc } A_i$$

nghĩa là : $A_i = \{a, a_1^i, a_2^i, \dots, a_{k-1}^i\}$.

$$\text{Khi đó, } \forall i, j (1 \leq i, j \leq n) \text{ nếu } i \neq j \text{ thì } \forall t \in [1, k] \cap \mathbb{Z}, a_i^t \neq a_j^t.$$

$$\text{Thật vậy, giả sử } \exists i, j \in [1, n] \cap \mathbb{Z} \text{ mà } i \neq j \text{ nhưng } \forall t \in [1, k] \cap \mathbb{Z}, a_i^t \neq a_j^t \text{ thì } A_i \text{ và } A_j \text{ có ít nhất 2 phần tử chung là a và } a_i^t, \text{ mâu thuẫn (*).}$$

$$\text{Như vậy, } \forall i, j \in [1, n] \cap \mathbb{Z}, i \neq j, A_i \cap A_j = \{a\}$$

$$\text{Do đó } \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \left| \bigcup_{i=1}^n (A_i \setminus \{a\}) \right| = n(k-1) + 1. \quad \epsilon$$

Bài toán 5 : (IMO - 1989)
Một hoán vị $\{x_1, x_2, \dots, x_{2n}\}$ của tập hợp $\{1, 2, \dots, 2n\}$, n nguyên dương, được gọi là có tính chất P nếu $|x_i - x_{i+1}| = n$ với ít nhất một giá trị $i \in [1, 2n) \cap \mathbb{Z}$. Chứng minh rằng với mỗi số n, số hoán vị có tính chất P lớn hơn số hoán vị không có tính chất P.

Lời giải :
Đặt M = $\{1, 2, \dots, n, n+1, n+2, \dots, 2n\}$.
Gọi A_k là tập tất cả các hoán vị của M sao cho trong các hoán vị đó, hai phần tử k và $k+n$ đứng kề nhau $\forall k \in [1, n] \cap \mathbb{Z}$.
Gọi A là tập tất cả các hoán vị có tính chất P.
Suy ra : $A = \bigcup_{k=1}^n A_k$.
Suy ra : $|A| = \sum_{1 \leq k \leq n} |A_k| - \sum_{1 \leq k < l \leq n} |A_k \cap A_l| + \sum_{1 \leq k < l < m \leq n} |A_k \cap A_l \cap A_m| - \dots$
Do đó :
Vì đây là tổng các số hạng của dãy đơn điệu giảm và đan dấu nên suy ra :
 $|A| \geq \sum_{1 \leq k \leq n} |A_k| - \sum_{1 \leq k < l \leq n} |A_k \cap A_l|$
Ngoài ra, ta có :

$$|A_k| = 2(2n-1)! \quad \text{và} \quad |A_k \cap A_l| = 4(2n-2)!$$

$$\text{Vậy } |A| \geq (2n-2)! \left[2n(2n-1) - \frac{n(n-1)}{2} \cdot 4 \right] = 2n^2 (2n-2)! > \frac{(2n)!}{2}.$$

3. KẾT LUẬN :
Bài báo này nêu lên đường công thức bù trừ tổng quát có thể giải được rất nhiều bài toán rời rạc, dạng khó và một số bài toán thực tế thường gặp đôi lúc lý giải chúng thường không dễ dàng.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. Trần Quốc Chiến, *Giáo trình lý thuyết tổ hợp (Dùng cho lớp cao học Toán)*.
- [2]. Vũ Dương Thụy, Nguyễn Văn Nho, *40 năm Olympic toán quốc tế, NXB Giáo dục 2004*.
- [3]. Nguyễn Văn Nho, *Asian Pacific Mathematics Olympiad, NXB Giáo dục 2002*.
- [4]. Kenneth H.Rosen, *Discrete Mathematics and its Applications, MC Graw Hill*.
- [5]. Chen Chuan-Chong and Koh Khee-Meng, *Principles and Techniques in Combinatorics, World Scientific 2004*.